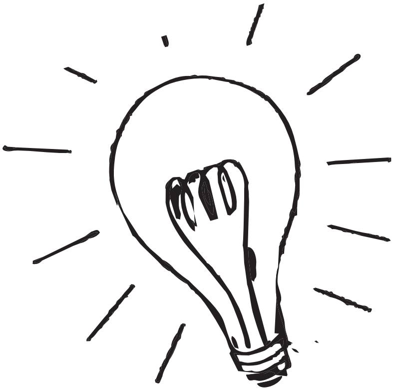
INTRODUCCIÓN al razonamiento matemático



INTRODUCCIÓN al razonamiento matemático

Jaime Andrés Castaño Perea
Celimo Alexander Peña Rengifo

VIGILADA MINEDUCACIÓN
USC UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI
EDITORIAL

Castaño, Jaime Andrés.
Introducción al razonamiento matemático / Jaime Andrés Castaño Perea, Celimo Alexander Peña Rengifo. -- Editor Edward
Javier Ordoñez. -- Cali : Universidad Santiago de Cali, 2018.
204 páginas ; 24 cm.
Incluye índice de contenido.
1. Matemáticas 2. Razonamiento 3. Lógica simbólica y matemática. I. Peña Rengifo, Celimo Alexander, autor.
II. Ordóñez, Edward Javier, editor. III. Tít.
511.3 cd 22 ed.
A1619178

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

VIGILADA MINEDUCACIÓN
USC UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI
EDITORIAL

INTRODUCCIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

1a. Edición 200 ejemplares
ISBN: 978-958-5522-49-7
ISBN DIGITAL: 978-958-5522-50-3

Proceso de arbitraje doble ciego:
"Double blind" peer-review.

Recepción/Submission:
Noviembre (November) de 2017.

Evaluación de contenidos/Peer-review outcome:
Febrero (February) de 2018.

Correcciones de autor/Improved version submission:
Marzo (March) de 2018.

Aprobación/Acceptance:
Septiembre (September) de 2018

Diagramación e impresión
Samava Ediciones E.U.
Celular: 313 6619756
Calle 1 No. 2 - 99
Popayán - Cauca

Distribución y Comercialización
Universidad Santiago de Cali
Publicaciones
Calle 5 No. 62 - 00
Tel: 518 3000, Ext. 323 - 324 - 414

CONTENIDO

PRÓLOGO

Para nadie es un secreto que las instituciones universitarias enfrentan un reto de gran magnitud al momento de abordar los cursos de fundamentación en matemáticas básicas. Las heterogéneas condiciones académicas de los estudiantes que llegan a los primeros semestres resultan tan variadas como las explicaciones sobre el porqué de las falencias y dificultades observadas en este nivel de formación. La comprensión de este fenómeno y propuestas para una mejora significativa en el proceso de aprendizaje por supuesto no es trivial y envuelve una multitud de entes que involucran desde el sistema educativo colombiano, pasando por padres de familia, profesores y por supuesto la institución universitaria.

Por otro lado, existen también cientos de propuestas bibliográficas disponibles en el mercado intentando subsanar de algún modo las falencias observadas en la mayoría de los estudiantes recién ingresados al proceso educativo. Muchas de estas ofertas corresponden a autores extranjeros, quienes manejan contextos muy distintos al colombiano, y a pesar de su valiosa contribución, mucho de este material no se adapta convenientemente a nuestra realidad educativa. Es por ello por lo que una obra como la aquí presente resulta ser de una importancia mayúscula en la construcción de ese puente cognitivo entre el estudiante que sale del colegio y la educación universitaria.

Esta obra está pensada para ayudar al estudiante a adquirir los conceptos fundamentales presentes en un curso de razonamiento cuantitativo de una manera explícita, donde la realización de actividades y ejercicios de parte del estudiante es prioritaria, y por ello el número de problemas propuestos a lo largo de este material, resulta considerablemente provechoso. Se introduce de manera temprana las estructuras numéricas básicas de una forma coherente pero intuitiva, permitiendo al estudiante apropiarse de manera fundamentada de las operaciones necesarias para poder efectuar adecuadamente las técnicas algebraicas con las que un estudiante debe familiarizarse antes de abordar cursos más avanzados. Al no descuidar el concepto de función que se discute sin formalismo excesivo, pero con justa precisión, se vinculan todas las ideas construidas durante todos los capítulos de este texto como un enlace común que resalta el edificio matemático como un todo.

Si bien existen ya muchas propuestas similares, esta obra es un intento novedoso que proviene del trabajo práctico observado en clase, de las dudas frecuentes y las dificultades típicas que los autores han reconocido a lo largo de su labor docente. Es por ello que el resultado compilado en este texto se constituye en una herramienta realista que permitirá a los estudiantes y docentes que usen este material acercar de manera amena y precisa hacia los saberes propios de un curso de razonamiento cuantitativo.

Carlos Ernesto Ramírez Ovalle

AL ESTUDIANTE

Es importante que comprenda la necesidad de desarrollar competencias matemáticas en su proceso de formación académica. En un sentido general, el uso de las matemáticas es inevitable en la cotidianidad en la solución de problemas en diversos contextos o para enfrentarse a situaciones en las que las matemáticas sea un elemento esencial.

Enfrentarse al estudio de las matemáticas, se basa en:

1. Tener actitud positiva frente al encuentro con las matemáticas, independientemente de cómo sienta que haya sido su trayectoria en la educación secundaria.
2. Pensar que cualquier persona, en cualquier nivel puede aprender matemática.
3. No dejar la solución de los problemas propuestos a lo que pueda dar una máquina, calculadora, celular o aparato de alta gama.
4. Tener en cuenta que para resolver o enfrentarse a situaciones se requiere saber. Es decir, enfrentarse a la solución de problemas requiere un mínimo de elementos conceptuales.
5. No intentar memorizar procedimientos pues este acto le impide construir sus propias soluciones o generar sus propias conclusiones. Se requiere pensar y elaborar estrategias propias de solución.
6. No pensar que los bajos resultados obtenidos en la educación básica o media se replicará en la universidad.
7. Tener un buen método de estudio y un espacio apropiado para hacerlo.
8. Estudiar en grupo es bueno. Permite intercambio de ideas. Estudiar de forma independiente le puede generar sus propias

soluciones y lo obliga a pensar en la solución. Las dudas generadas las resolverá en clase o con sus compañeros.

9. Tener disciplina y continuidad en sus tiempos de estudio. Esto consolidará lo estudiado en cada momento. Estudiar de forma intermitente no le da continuidad en el aprendizaje.
10. Leer antes de resolver problemas propuestos. Recuerde que leer previo a la clase le puede traer beneficios. Esto motivará a hacer preguntas surgidas durante la lectura independiente.
11. Reflexionar sobre la necesidad de conocer el lenguaje matemático, sus símbolos y significado para tener éxito al momento de hacer lectura matemática.
12. Leer de otras fuentes bibliográficas puede ser de gran utilidad. Genera otras estrategias de solución.
13. No quedarse con el error. Esto no es sano. Requiere conocer cuáles fueron sus errores al resolver cierto problema.
14. Aunque a usted le parezca que puede ser trivial la respuesta, debe generar la pregunta al docente o tutor encargado referente la duda que le genere las explicaciones.
15. Podrás encontrar en algunos apartes del texto, algunos códigos QR que te llevarán a explicaciones complementarias de unos temas particulares.

Las anteriores son algunas recomendaciones. Solo depende que logres motivarte y tenerlas en cuenta. El éxito del curso depende de ti mismo.

INTRODUCCIÓN

No se puede negar la influencia que tienen las matemáticas a la hora de interpretar diversas situaciones que nos rodean, desde las más simples como adquirir un producto o la argumentación en una discusión; o hasta las más complicadas, como proyectar el lanzamiento de un satélite a un planeta lejano. Aun así, se observa que el aprendizaje de las matemáticas es esquivo a muchos de los estudiantes, esto se evidencia en las diferentes pruebas que se realizan tanto a nivel nacionales (Pruebas SABER) como en las internacionales (PISA).

A partir de los estándares básicos de las competencias en matemáticas definidos por el Ministerio de Educación Nacional, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) replantea la forma de evaluar a los estudiantes a través de las Pruebas SABER, debido a las nuevas concepciones que se han planteado sobre la enseñanza matemática en un contexto mundial. Lo anterior, motiva a las instituciones educativas tanto públicas como privadas a direccionar sus esfuerzos en la enseñanza de las matemáticas, dando un cambio transcendental en sus lineamientos curriculares de tal forma que la enseñanza de las matemáticas actuales estén basadas en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes para la vida, las cuales les facilitará el desempeño para enfrentarse a problemas o situaciones de manera que sean resueltos empleando las herramientas matemáticas y ajustándolas de forma exitosa al contexto.

El ingreso a la educación superior exige unas competencias en matemática, desarrolladas estas, durante los estudios en la educación básica y media y continuada en la educación superior. La universidad Santiago de Cali, dentro del examen de ingreso vincula entre otras, la prueba matemática y orienta y formula sus preguntas para que el estudiante utilice las competencias matemáticas en la solución de problemas en diversos contextos. Estos resultados evidencian que los estudiantes no se han apropiado en un alto porcentaje de tales competencias. Lo anterior y preocupados por la necesidad de generar espacios en donde el estudiante pueda apropiarse de conocimiento matemático y herramientas que le permita la solución de problemas, ha dado la posibilidad que en la Universidad se ofrezca el curso de Razonamiento Cuantitativo, transversal a las mallas curriculares de todos los programas como acción tendiente a fortalecer y garantizar la apropiación de estas competencias en los estudiantes.

"El curso de razonamiento cuantitativo en la Universidad Santiago de Cali, retoma las competencias matemáticas abordadas durante la educación básica y media, con la finalidad que el estudiante sea capaz de enfrentarse a situaciones y resolver problemas en diversos contextos como estudiante, y finalmente como profesional".

El desarrollo de competencias matemáticas exige elementos conceptuales y procedimentales de las matemáticas básicas para enfrentarse a la solución de los problemas. Teniendo en cuenta las necesidades de nuestra población estudiantil y tomando como referencia adicional los resultados de las pruebas PIPE que realizan los estudiantes para ingresan a la Universidad Santiago de Cali, iniciamos durante varios semestres el proceso de observación e investigación de cuáles eran las deficiencias y reales necesidades de los estudiantes matriculados por primera vez y en calidad repitentes para abordar el curso de razonamiento cuantitativo. Esta investigación, a través de exámenes de diagnóstico distintos a la prueba PIPE, nos mostró que en un alto porcentaje los estudiantes no tienen conocimiento en manejo de temas asociados a conjuntos numéricos y elementos básicos del álgebra los cuales son esenciales en el desarrollo de gran parte de problemas en nuestra cotidianidad. Más aún, un análisis más cercano a los resultados de las pruebas y tomando como referencia acercamientos con los estudiantes en aulas de clase, se concluye que gran parte de la población estudiantil de primer semestre que matriculan razonamiento cuantitativo tiene deficiencias en lectura, escritura y análisis de textos que involucran información de tipo cuantitativo y simbólico.

Las reflexiones suscitadas alrededor del año 2014 a partir de estos resultados han motivado cambios alrededor del curso de razonamiento cuantitativo que han sido positivos a lo largo de los últimos semestres y así mismo, cambios en las metodologías empleadas por el cuerpo docente, incluyendo en el trabajo de aula con los estudiantes estas notas de clase que han sido la recopilación de experiencias y conclusiones en cada uno de los semestres referente a qué es lo más conveniente de incluir, de tal forma que motive al estudiante al quehacer matemático, que le permita reflexionar sobre la necesidad e importancia de las matemáticas en la cotidianidad, y también, que le brinde herramientas matemáticas que le ayuden a mejorar su conocimiento, actitud y habilidades para enfrentarse a diversas situaciones en contextos particulares que vinculen elementos de tipo cuantitativo, es decir, que fortalezca las competencias matemáticas en pro de dar soluciones a problemas que se le puedan presentar en su vida como estudiante y profesional.

Es así que la información consignada en este documento no busca que dentro del curso de razonamiento cuantitativo se estudie en detalle la temática y procesos desarrollados durante los seis años de educación media y básica. Solo se tratará la temática que se considera fundamental en el desarrollo de las competencias matemáticas para la vida universitaria y profesional del estudiante. Destacamos que los elementos conceptuales propuestos y los problemas planteados, corresponden a aquellos que permitan abordar competencias tales como: comprender y manipular representaciones de datos cuantitativos o de objetos matemáticos en distintos formatos, establece, ejecuta y evalúa estrategias que involucren información cuantitativa y objetos matemáticos; y por último, justifica y da razón de afirmaciones o juicios a propósitos de situaciones que involucren información cuantitativa u objetos matemáticos.

Es así que iniciamos con los conjuntos y su estrecha relación con los elementos, abordando las operaciones entre ellos y planteando algunas situaciones que los involucran. Luego hacemos un recuento de la aritmética, iniciando con el reconocimiento de los conjuntos numéricos y terminando con las operaciones entre ellos, sin dejar de lado aplicaciones como razones, proporciones y aplicaciones de este par de conceptos. En este sentido, dedicamos un capitulo al cálculo con numero reales tales como cálculos de razones, proporciones y porcentajes. Finalizamos la primera parte del curso con el manejo de los exponentes y algunos de los usos que se le puede dar, tales como la notación científica.

En una segunda parte, se introduce el leguaje algebraico. Se introducen las variables, constantes y su relación con la interpretación de problemas de la vida cotidiana. Adicional se trabajan las operaciones entre expresiones algebraicas. Luego pasamos a la solución de las denominadas ecuaciones (igualdad entre expresiones algebraicas) y las inecuaciones (desigualdad entre expresiones algebraicas). En ambas situaciones solo se trabajan los casos lineal y cuadrático, sin dejar de lado los problemas que involucran representación y modelamiento de situaciones en diversos contextos.

En una tercera parte, se hace un tratamiento a la noción de relación y como caso particular, la solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Luego, se aborda el concepto de función y se restringe el estudio a los casos de función lineal, cuadrática y situaciones que las involucra.

Finalmente, y con el ánimo de incorporar las TIC en el texto, se han vinculado códigos QR en algunos apartes del texto, en el que el estudiante podrá visualizar en la web, explicaciones complementarias de algunos conceptos y ejemplos de temas particulares y de mayor dificultad.

CAPÍTULO 1. CONJUNTOS Y OPERACIONES

CAPÍTULO 1.

CONJUNTOS Y OPERACIONES

En la cotidianidad nos rodea los conjuntos como, por ejemplo: conjunto de personas, una vitrina en una panadería, conjunto de palabras en un mensaje de Instagram, etc. La idea en este capítulo es proporcionar el lenguaje suficiente para contribuir en la correcta lectura y representación de situaciones que contemplan el concepto de elemento y conjunto, así como todo lo que se derive de lo anterior. Un conjunto se puede formar a partir de elementos y los elementos harán parte de los conjuntos. Tendremos en cuenta lo siguiente cuando queramos referirnos a conceptos asociados al de conjunto o elemento:

1. **Notación**: Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas mientras los elementos se suelen representar con letras minúsculas.

   Ejemplo. El conjunto de estudiantes que cursan razonamiento cuantitativo lo podemos nombrar con la letra R. Los elementos que conforman dicho conjunto con la letra x o e.

   Ejercicio 1. Nombra el conjunto de los artículos incluidos en la Constitución de Colombia.

2. **Escritura de conjuntos**: Existen dos formas para referirse hacia los conjuntos:

   Por compresión: Se describen sus elementos a través de una o varias características que lo constituyen.

Ejemplo. El conjunto cuyos elementos son las personas que viven en Santiago de Cali, está escrito por compresión como,

$$C = \{x : x\ es\ un\ ciudadano\ de\ Cali\}$$

Ejercicio 2. Escribe los siguientes conjuntos por compresión:

a) El conjunto de ciudadanos colombianos.

b) El conjunto de pacientes de urgencias de la clínica San Fernando el 25 de enero del 2018.

c) El conjunto de estudiante de la universidad Santiago de Cali que estudian ingenierías o bien estudian medicina.

Por extensión: Se describe entre llaves cada uno de los elementos, separados por el símbolo de coma.

Ejemplo. El conjunto cuyos elementos son los colores de la bandera de Colombia escrito por *extensión* es

$$B = \{azul, amarillo, rojo\}.$$

Ejercicio 3. Escribe los siguientes conjuntos por extensión:

a) El conjunto de números enteros que satisfacen la ecuación $x + 4 = 0$.

b) El conjunto conformado por las letras de tu nombre.

c) El conjunto de los números que son primos y pares.

3. **Cardinalidad**: Es la cantidad de elementos distintos de un conjunto. Si X es un conjunto con n elementos distintos, entonces el cardinal de X se escribe $Car(X) = n$.

   Ejemplo. Si el conjunto R constituye un grupo de Razonamiento Cuantitativo con 70 estudiantes matriculados, entonces el conjunto R tiene cardinalidad 70, es decir, $Car(R) = 70$. Así mismo, el conjunto B de los colores de la bandera de Colombia tiene cardinalidad 3, es decir, $Car(B) = 3$.

   Ejercicio 4. Nombre y determina la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

   a) Conjunto conformado por las personas que viven en tu sitio de residencia.

   b) Conjunto de medicamentos para controlar una cefalea.

   c) Conjunto de artículos de la constitución política.

4. **Conjuntos iguales**: Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Si los conjuntos A y B son iguales, escribimos $A = B$.

   Ejemplo. Los siguientes conjuntos son iguales: $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{x, z, y, z\}$.

   Ejercicio 5. Responde y justifica si los siguientes pares de conjuntos son iguales.

   a) Conjunto de las personas que pagan valorización y los que pagan impuesto automotor.

b) Conjunto de los estudiantes matriculados en primer semestre en enfermería y los de primer semestre que cursan razonamiento cuantitativo.

5. **Relación de pertenencia**: Establece la relación que hay entre un elemento y un conjunto. Utilizamos el símbolo $\in$ para indicar que un elemento hace parte o pertenece a un conjunto. En caso contrario, empleamos el símbolo $\notin$.

Ejemplo. A continuación se emplea el símbolo de pertenencia para indicar si un elemento pertenece o no al conjunto dado, a través de las siguientes proposiciones.

a) $\{2\} \in \big\{1,2,\{2,3\}\big\}$. Es falso, pues $\{2\}$ no es elemento.

b) $\{\emptyset\} \in \{1,\emptyset,\{3\}\}$. Es falso, pues $\{\emptyset\}$ no es elemento.

c) $\{1,5\} \in \big\{1,5,\{1,5\},6,\{6\}\big\}$. Verdadero. Uno de los elementos es $\{1,5\}$.

Ejercicio 6. Dados los conjuntos $X = \{a,\{a,1\},\{b\},b,c\}$ y $Y = \big\{a,b,c,\{a\},\{b\}\big\}$. Emplea el símbolo de relación de pertenencia para indicar si el elemento hace parte del conjunto.

a) a___X

b) b___X

c) $\{a,1\}$___Y

d) $\{a\}$___X

e) d___Y

f) b___Y

g) $\{a\}$___Y

h) $\{b, c\}$___Y

i) $\{a, \{b\}\}$___Y

6. Relación de inclusión: Establece la relación que hay entre conjuntos. Utilizamos el símbolo $\subseteq$ para indicar que un conjunto es subconjunto de otro; y en caso contrario, empleamos el símbolo $\nsubseteq$.

Ejemplo. Los siguientes ejemplos utilizan la relación de inclusión.

a) Si $A = \{1,2,3,4\}$, obtenemos conjuntos como: $X = \{1\}$, $Y = \{2,4\}$, $Z = \{1,2,3,4\}$. Cada uno de estos satisface $X \subseteq \text{A}$, $Y \subseteq \text{A}$ y $Z \subseteq \text{A}$. El conjunto $W = \{1,3,6\}$ no es subconjunto de A, pues el elemento 6 no es un elemento de A. Así, $W \nsubseteq \text{A}$.

b) En un supermercado, el conjunto de todos los lácteos L corresponde a un subconjunto del conjunto de todos los productos P del supermercado. En este caso, $L \subseteq \text{P}$.

c) El conjunto formado por los países del MERCOSUR (M) constituye un subconjunto del conjunto formado por los países de Sur América (S), A su vez el conjunto S es un subconjunto de los países del continente americano (A). Luego, $M \subseteq S$ y $S \subseteq A$.

Ejercicio 7. Escribe el símbolo $\in$ o $\notin$ o $\subseteq$ o $\nsubseteq$ según corresponda, teniendo en cuenta los siguientes conjuntos: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2, \{4,5\}, 6\}$ y $C = \{\{1\}\}$,

a) 1___C

b) $\{2, \{4,5\}\}$___B

c) 6___C

d) $\{1\}$___C

e) $\{6\}$___B

f) $\{1,6\}$___C

g) $\{1,3,5\}$___A

h) $\{1, \{4,5\}, 6\}$___B

i) $\{3,4\}$___A

Ejercicio 8. Responde y justifica:

a) ¿Es verdad que $\{3,4,5,6\} \subseteq \{3,4,5,6,7,8\}$?

b) ¿Es verdad que $\{1,2,3,4\} \subseteq \{4,3,2,1\}$?

c) El conjunto de todos los jueces de Santiago de Cali, ¿constituye un subconjunto de los egresados de la Universidad Santiago de Cali?

d) Si usted tiene la posibilidad de seleccionar entre al menos un billete o seleccionarlos todos, entre un billete de mil, uno de dos mil y uno de 10 mil, ¿cuántas formas posibles de sumar dinero puede tener? Es decir, ¿cuántas formas de selección tiene?

7. **Conjunto vacío**: Es el conjunto que no tienen elementos. Empleamos los símbolos $\{\quad\}$ o $\emptyset$ para representar el conjunto vacío. El último símbolo es el más empleado.

Ejemplo. El conjunto de personas que tienen por edad 200 años de vida es un conjunto vacío.

Ejercicio 9. Si $A = \{\emptyset, 1,2, \{3\}, \{\emptyset\}, \{1\}\}$, escriba F o V según corresponda. Justifica tu respuesta.

a) $\emptyset \in A$. (__)
______________________________,

b) $\{3\} \subseteq A$. (__)
______________________________,

c) $\{3\} \in A$. (__)
______________________________,

d) $\{1\} \subseteq A$. (__)
______________________________,

e) $\emptyset \subseteq A$. (__)
______________________________,

f) $A \in A$. (__)
______________________________,

Ejercicio 10. Escribe por compresión o extensión según sea conveniente, los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de números que son positivos y negativos.

b) El conjunto cuyos elementos son estudiantes de Razonamiento Cuantitativo que tengan más de 80 años.

Ejercicio 11. Determina si los conjuntos a continuación son vacíos o no. Justifica.

a) El conjunto de títulos ganados por la selección Colombia en un mundial.

b) El conjunto de prerrequisitos necesarios para cursar Razonamiento Cuantitativo.

c) El conjunto de estudiantes con edad entre 20 y 60 años en el salón de clase.

Ejercicio 12. La siguiente tabla corresponde a los salarios otorgados a tres personas en una empresa de ventas de aparatos tecnológicos.

Trabajador	Horas laborales	Sueldo
Héctor	48	1200000
Luisa	36	1300000
Nei	52	1980000

Responde y justifica:

a) ¿Cuál es el conjunto de empleados que tienen un sueldo superior a $1000000 y que trabajan más de 20 horas?

b) ¿Cuál es el conjunto de empleados que ganan entre $\$900000$ y $\$1300000$ o que trabajan más de 60 horas?

c) ¿Cuál el conjunto de empleados que trabajan más de 60 horas y que ganan menos de $\$1000000$?

8. **Conjunto universo**. Corresponde al conjunto más grande posible dentro de un problema a estudiar.

   Ejemplo. El conjunto de los seres humanos podría considerarse el conjunto universal si trabajamos con conjuntos de personas.

   Ejercicio 13. ¿Cuál sería el conjunto universal si trabajamos con el conjunto de estudiantes de enfermería de la Universidad Santiago de Cali?

9. **Operaciones entre conjuntos**: Así como es usual realizar operaciones entre números reales, entre los conjuntos también se pueden realizar operaciones. Nos restringimos a trabajar con la unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano.

   Unión $[\cup]$. Dados dos conjuntos A y B, la unión de ellos corresponde a un nuevo conjunto, el cual está formado por los elementos tanto del conjunto A como los del conjunto B. El nuevo conjunto se simboliza $A \cup B$, es decir,

$$A \cup B = \{x : \; x \in A \; o \; x \in B\}$$

Ejemplo. Resultados de hacer unión de conjuntos:

a) Si $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ y $B = \{1,2, \{2,4\}\}$ entonces,

$$A \cup B = \{a, b, c, \{a, b\}, 1,2, \{2,4\}\}.$$

b) Sean los conjuntos
$X = \{x : x \text{ es país miembro de la Alianza del Pacífico (AP)}\}$
y
$Y = \left\{\begin{array}{c} x : x \text{ es un país miembro de la Comunidad de} \\ \text{Naciones Andinas (CAN)} \end{array}\right\}$,
entonces

$$X \cup Y = \left\{\begin{array}{c} \text{Peru, Bolivia, Colombia, Ecuador, México,} \\ \text{Chile, Argentina} \end{array}\right\}$$

Intersección $[\cap]$. Es la operación entre dos conjuntos A y B, cuyo resultado es un conjunto donde sus elementos son aquellos que están en A y también en el conjunto B. El conjunto resultado de esta operación se simboliza $A \cap B$, es decir,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo. Observa las siguientes intersecciones:

a) Si $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ y $B = \{1,2, \{2,4\}\}$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

b) Si X y Y, corresponde a los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

$$X \cap Y = \{\text{Peru, Colombia}\}$$

Diferencia $[-]$**.** La diferencia entre los conjuntos A y B, es el conjunto, $A - B$, que tiene como elementos aquellos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B, es decir,

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo. Los siguientes ejemplos corresponden a diferencias entre conjuntos:

a) Si $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ y $B = \{1,2, \{2,4\}\}$ entonces $A - B = A$.

c) Si X y Y, corresponde a los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

$$X - Y = \{\text{Chile, México}\}$$
$$Y - X = \{\text{Ecuador, Bolivia}\}$$

Complemento $[\square^c]$. Si $X \subseteq U$, donde U es un conjunto universal, el complemento de X con respecto a U es lo que le falta a X para ser U, es decir, $X^c = U - X$.

Ejemplo. Si consideramos el conjunto universal como los ciudadanos de Cali y X el conjunto de personas que estudian en la Universidad Santiago de Cali, entonces los elementos de X^c son los ciudadanos que no estudian en la universidad.

Para referirnos al producto cartesiano, es necesario entender el concepto de par ordenado. Si A y B son conjuntos no vacíos, un elemento (a, b), tal que $a \in A$ y $b \in B$ se denomina un par ordenado. El elemento (b, a) no es lo mismo que (a, b).

Producto cartesiano $[\times]$. El producto cartesiano entre dos conjuntos A y B no vacíos, es el conjunto de pares ordenados (a, b) tal que $a \in A$ y $b \in B$. Es decir,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo. Si $A = \{a, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$ entonces el producto cartesiano viene dado por:

$$A \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

Ejercicio 14. Realiza las siguientes operaciones, de acuerdo con los conjuntos dados $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
$C = \{2,3,4,6,8\}$ y $B = \{1,3,5,7,9\}$.
Aquí el conjunto A será el conjunto universal.

a) $A \cup C =$

b) $(B \cap C) - (A \cup B) =$

c) $C^c =$

d) $[(A \cap B) - (B \cup C)]^c =$

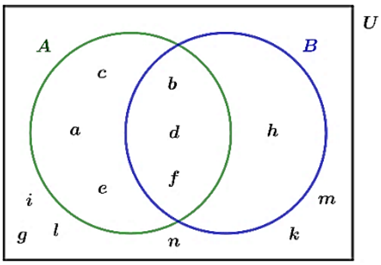
e) $[(A - B) \cap (B - C)]^c =$

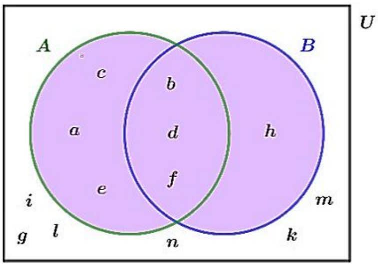
f) $A^c \cup (B - C)^c =$

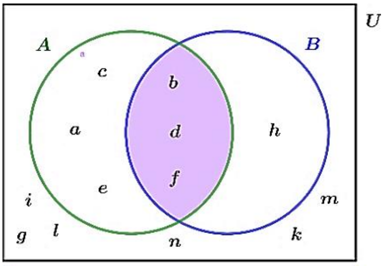
g) $B \times B =$

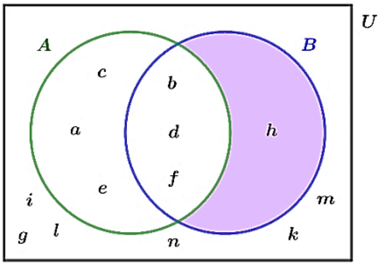
10. **Diagrama de Venn**: Son diagramas que permiten representar y visualizar los conjuntos, operaciones y propiedades de los conjuntos.

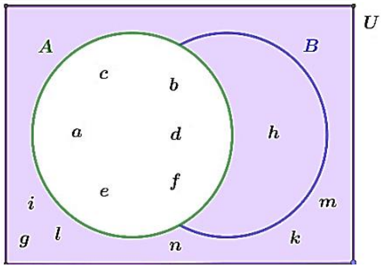
Ejemplo. Si $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ y $B = \{b,d,f,h\}$, entonces el siguiente diagrama permite visualizar la relación que hay entre A y B. La zona sombreada representa cada una de las operaciones que se pueden establecer entre ellos. Se deja al estudiante verificar cuál operación representa cada diagrama.







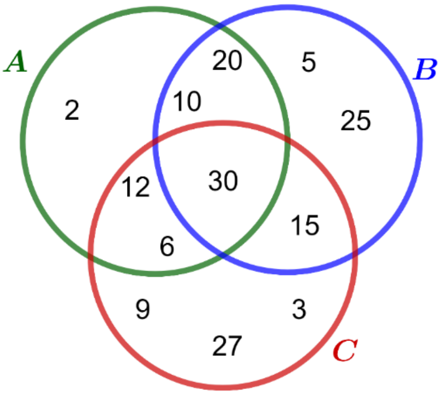




https://youtu.be/i2tP93kOnJg
Video 1

Ejercicio 15. Si A y B son tales que: $A - B = \{1,3,5\}$, $B - A = \{2,4,6\}$ y $A \cap B = \{5,8\}$, determine los conjuntos A y B. Use diagramas de Venn para ello.

Ejercicio 16. Complete por extensión los conjuntos con base en el diagrama de Venn siguiente:



a) $A = \{ \qquad \}$

b) $B = \{ \qquad \}$

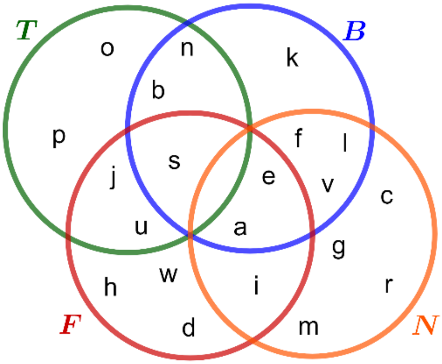
c) $C = \{ \qquad \}$

d) $A \cap B = \{ \qquad \}$

e) $B \cup C = \{ \qquad \}$

f) $C - A = \{ \qquad \}$

Ejercicio 17. El siguiente diagrama muestra un grupo de amigos y los deporte que ellos practican. Cada amigo se indica por la letra inicial en minúscula: Alejandro(a), Benjamín(b), Carolina(c), Daniel(d), Ernesto(e), Federico(f), Gloria(g), Héctor(h), Inés(i), Julia(j), Kevin(k), Lucia(l), Mónica(m), Nora(n), Oscar(o), Pablo(p), Roberto(r), Sara(s), Tomas(t), Ulises(u), Viviana(v), William(w). Cada deporte por la letra inicial en mayúsculas: Baloncesto(B), Natación(N), Fútbol(F), Tenis(T).



De acuerdo con el diagrama responde:

a) ¿Quienes practican Baloncesto?

b) ¿Quienes practican solo Fútbol?

c) ¿Quienes practican Natación y Fútbol?

d) ¿Quienes practican Tenis, pero no Baloncesto?

e) ¿Quienes practican Natación o Tenis?

f) ¿Quienes practican los cuatro deportes?

g) ¿Quienes practican solo un deporte?

h) ¿Quienes practican dos deportes o más?

i) ¿Qué deporte tiene más participantes?

Ejercicio 18. Julio trabaja en proyectos de cortometrajes. En el año 2016: Escribió y produjo 3 proyectos. Escribió un total de 5 proyectos y produjo un total de 7 proyectos. Responde:

a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?

b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?

Ejercicio 19. Juan colecciona música colombiana de Juan y Ana. En la colección que tiene 25 CD, tiene lo siguiente: 5 en los que canta tanto Juan como Ana, 7 en los que canta Juan, 8 en los que canta Ana y 15 en los que no canta ni Juan ni Ana. Responde:

a) ¿En cuántos de sus CD aparece solo Juan?

b) ¿En cuántos de sus CD aparece solo Ana?

c) ¿En cuántos de los CD aparece al menos uno de estos dos cantantes?

11. **Propiedades básicas**. Para finalizar este capítulo se presentan algunas de las propiedades más relevantes de las operaciones de conjuntos.

Propiedad	**Unión**	**Intersección**
Asociativa	$(A \cup B) \cup C$ $= A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C$ $= A \cap (B \cap C)$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Absorción	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C)$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C)$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Neutralidad	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$

Dominación	$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Complementación	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$
D'Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

Ejercicio 20. Considere como universo el conjunto de las letras de nuestro alfabeto y los conjuntos:

$A = \{x : x$ es una vocal$\}$,
$C = \{a,\ g,\ r,\ d,\ u,\ f,\ h,\ x,\ p,\ e,\ o\}$ y
$B = \{x : x$ es una letra de la palabra osteoporosis$\}$.

Verifique que se cumple la propiedad de D´morgan tanto para la unión como para la intersección.

CAPÍTULO 2. LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

CAPÍTULO 2.

LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Entendemos por sistema numérico un conjunto de números dotado de operaciones entre sus elementos que satisfacen determinadas propiedades. En este capítulo haremos una presentación de los principales conjuntos numéricos hasta definir el conjunto de los números reales y estudiar sus operaciones.

2.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1.1 Números Naturales

Los números naturales son aquellos que utilizamos para contar y representar la cantidad de elementos en un conjunto. Por ejemplo, la cantidad de pupitres en un salón, el número de créditos matriculados cada semestre o el número de caracteres usados en un tweet. Este conjunto de números se simboliza por $\mathbb{N}$ y se puede escribir como:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4, \dots \mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \dots\}$$

Algunos discuten la inclusión del cero 0 (neutro aditivo) en el conjunto de números naturales, pero no ahondaremos en esta discusión y admitimos el cero como número natural.

2.1.2 Números Enteros

Aunque los números naturales eran suficientes para contar, pronto se haría indispensable simbolizar cantidades en un sentido opuesto (por ejemplo, para expresar deudas, temperaturas bajo cero, años antes de Cristo, altura bajo el nivel del mar, etc.). De esta manera sí 3 representa una cantidad a favor (positivo), el símbolo -3 representaría una cantidad en contra (negativo), denominado opuesto aditivo de 3. Ahora al unir el conjunto de los números naturales y sus opuestos aditivos, obtenemos el conjunto de los números enteros que simbolizamos como $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Dentro del conjunto de los números enteros, se identifican los siguientes tipos de números:

a) Números pares. Son los múltiplos de 2, es decir, aquellos que tienen la forma $2k$, siendo $k \in \mathbb{Z}$. Ejemplos de números pares son: $2, 4, 18, \ -6, -100$, etc.

b) Números impares. Números que no son pares. Difieren en una unidad de los pares. Estos números tienen la forma $2k + 1$ o $2k - 1$. Ejemplos de números impares, $3, 5, 15, -7, -1$, etc.

c) Números primos. Son números que tienen exactamente dos divisores positivos, el uno y el mismo número. Ejemplos de números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13$,etc.

2.1.3 Números Racionales

Hasta el momento podemos dar cuenta de cantidades enteras tanto positivas como negativas. Pero qué pasa si queremos representar la división en partes de una unidad (por ejemplo, una manzana). Para esto es necesario indicar en cuantas partes (iguales) se divide la unidad y cuántas partes se tomarían de esta. Esto obliga a implementar la razón de números enteros. En el caso de la manzana, podemos dividirla en 4 partes iguales y tomamos 3 partes de esta. En este caso hemos tomado tres cuartas partes de la manzana, es decir, $\frac{3}{4}$ de la manzana. Tenemos así, el conjunto de números racionales.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} :\ donde\ a, b\ \in\ \mathbb{Z}\ y\ b \neq\ 0\right\}$$

En todo racional $\frac{a}{b}$, el número entero a se llama numerador; y el número b, denominador.

Ejemplo. Los siguientes números son racionales.

a) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{-3}{3}$
e) $\frac{5}{3+4}$

b) $\frac{0}{2}$
d) $\frac{-5}{3}$
f) $\frac{5}{5}$

2.1.3.1 Representación Decimal

A la hora de representar los números racionales es común utilizar la representación decimal la cual podría ser como un número decimal finito o un número decimal, infinito periódico. La representación decimal infinita no periódica corresponde a la representación de números irracionales que veremos más adelante. Nos restringimos al estudio de la representación decimal de los números racionales.

Ejemplo. Los siguientes ejemplos ilustran la forma como se puede realizar la transformación de un decimal a racional y viceversa.

a) $\frac{5}{2} = 2{,}5.$ Esta es una representación decimal finita. Se puede emplear una calculadora para cambiar su representación.

b) $\frac{6}{7} = 0{,}857142857142857142 \ldots = 0.\overline{857142}.$ Decimal infinito periódico. Se utiliza una calculadora para cambiar su representación.

c) $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots = 0.\overline{3}.$ Decimal infinito periódico.

d) $3{,}6 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$. El número decimal se transforma en una fracción decimal, en donde la cantidad de ceros de la potencia de 10 en el denominador, es igual a la cantidad de posiciones decimales. Esta corresponde a la transformación de un decimal finito en racional.

e) $\frac{6}{2} = 3 = 3{,}0 = 3{,}00 = 3{,}0000 \ldots = 3.\bar{0}$. Decimal finito o infinito periódico.

Ejercicio 20. Realiza la conversión de decimal a racional y viceversa para los siguientes números. En caso que sea necesario, redondea a dos cifras decimales.

a) $\frac{7}{9} =$ c) $\frac{5}{10} =$ e) $0{,}0012 =$

b) $0{,}2352 =$ d) $\frac{25}{100} =$ f) $8{,}5022 =$

Ejemplo. Aunque no es el interés de este capítulo, ilustramos con un ejemplo la forma como se puede convertir un número decimal infinito periódico a su forma racional. La clave de esta transformación consiste en eliminar la parte decimal a partir de un procedimiento aritmético.

Para esto, hagamos la transformación del número $2.565656\ldots$ a racional. Iniciamos haciendo $x = 2{,}56565656\ldots$. La parte decimal está conformada por dos dígitos, el 56, luego multiplicamos por 100 la expresión y queda $100x = 256.565656\ldots$. Multiplicamos por 100 de forma conveniente para dejar la misma parte decimal del número inicial. Al restar x de $100x$ que tienen la misma parte decimal se obtiene

$$100x - x = 256.565656\ldots - 2.56565656\ldots = 254$$

Por lo tanto, $99x = 254$. Observe que este procedimiento genera un número entero. Al despejar la variable x que es el número al cual le queremos hacer la transformación, queda $x = \frac{254}{99}$, siendo esta la representación racional.

Ejercicio 21. Convierte a número racional los siguientes números decimales.

a) $3,\overline{23}$ b) $0,\overline{9}$ c) $12,\overline{321}$ d) $0{,}34\overline{23}$

2.1.4 Números Irracionales

Estos números no deseables por algunos, pero necesarios a la hora de interpretar las magnitudes del mundo que nos rodea, tiene sus orígenes en la geometría. Por ejemplo, para calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad (1), no podemos representar esta magnitud mediante ningún número racional, lo único que se podía decir, gracias al teorema de Pitágoras es que el cuadrado de tal magnitud es igual a 2, motivo por el cual se simboliza por $\sqrt{2}$. Y no solo se trata de números que no tienen raíz entera, también aparecen el famoso π(Pi) y e(Euler), entre otros. El conjunto de los números irracionales se define como:

$$\mathbb{I} = \{x : x \notin \mathbb{Q}\}$$

Ejemplo. Algunos números irracionales son:

a) $\sqrt{2}$ b) π c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{5}$

En su representación decimal, los números irracionales, a diferencia de los racionales tiene una representación decimal infinita no periódica, siendo esta la característica que diferencia los racionales de los irracionales.

2.1.5 Números Reales

Los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales, es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Observación 1 Este conjunto de números reales es el más grande que consideramos en este curso. Existe el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ pero no se abordará en este curso por no ser de interés. En adelante, cuando hablemos de número, asumimos que es un número real, excepto que se enuncie que pertenezca a un subconjunto en particular.

2.2 Operaciones entre Números

Las operaciones que se definen en el conjunto de los números reales son la suma (resta) y multiplicación (división), las cuales satisfacen ciertas propiedades que serán enunciadas más adelante. Estas operaciones serán empleadas durante el resto del curso y su uso será inevitable.

2.2.1 Operaciones en $\mathbb{N}$

Las operaciones entre los números naturales son las usuales de nuestra primaria.

Ejemplo. Los siguientes ejemplos nos remontan a esa época.

a) $5 + 6 = 11$

b) $2 \cdot 0 = 0$

c) $8 \cdot 4 = 32$

d) $5 \cdot 1 = 5$

e) $1 \cdot 0 = 0$

f) $5 + 0 = 5$

2.2.2 Operaciones en $\mathbb{Z}$

La suma y producto en los números enteros, a diferencia de los números naturales, considera el signo de los números a operar. Estudiamos la suma y por tanto la resta, a partir del opuesto aditivo de un entero. Finalmente, estudiamos el producto entre enteros.

Suma. En la suma identificamos cuatro casos, que corresponden a la forma en que podemos combinar los números enteros.

Ejemplo. Observa las siguientes sumas:

a) Sumar el 5 y el 7: $5 + 7 = 12$

b) Sumar el -3 y el -8: $(-3) + (-8) = -11$

c) Sumar el 12 y el -4: $12 + (-4) = 8$

d) Sumar el -23 y el 10: $(-23) + 10 = -13$

https://youtu.be/oQsy07oHGYo
Video 2

Ejercicio 22. Efectúa las siguientes sumas.

a) $10 + (-16) =$

b) $10 + (-30) + 40 =$

c) $10 + (-2) =$

d) $-3 + 7 + 5 - 8 =$

e) $(-5) + (-7) + (-8) =$

f) $(-4) + 8 =$

Observación 2 Tenga en cuenta lo siguiente:

a) Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a + 0 = a$.
► Escribe un ejemplo:

b) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $a + (-a) = 0$.
►Escribe un ejemplo:

c) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $-(-a) = a$.
►Escribe un ejemplo:

Diferencia. La diferencia entre números enteros se define a partir de la suma. Esto es, si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a - b = a + (-b)$. Es decir, si queremos restar b de a, lo que haremos es sumar el inverso aditivo de b a a. Note y tenga cuidado de que en la expresión $a - b = a + (-b)$, el signo menos del término izquierdo corresponde al signo de la operación, mientras que el signo menos del término derecho al opuesto de b.

Ejemplo. Algunas restas son:

a) Resta -4 de 3. Al hacer esta resta queda
$3 - (-4) = 3 + \left(-(-4)\right) = 3 + 4 = 7$

b) $5 - 9 = 5 + (-9) = -4$

c) $(-2) - 9 = (-2) + (-9) = -11$

d) $(-6) - (-19) = -6 + \left(-(-19)\right) = -6 + 19 = 13$

Ejercicio 23. Resuelve:

a) $3 - 8 =$

b) $3 - (-8) =$

c) $-5-5=$

d) $0-(-8)=$

e) $1-3-8=$

f) $-10-1+8=$

g) $-4-5+7=$

h) $(3-7)-\big(5+(-13)\big)=$

i) $-[(8+9)-(9-10)-(10-11)]$

j) $3-[6-(3-5)]-[-5+(1-7)-15]$

Observación 3 Tenga en cuenta las siguientes propiedades: Para todo $t \in \mathbb{Z}$ se cumple:

a) $0-t=-t$.
►Escribe un ejemplo:

b) $t-0=t$.
►Escribe un ejemplo:

c) $t-t=0$.
►Escribe un ejemplo:

Ejercicio 24 Resuelve los siguientes problemas:

a) Un guerrero romano nació en el año 52 a.C. y murió en el 10 d.C. ¿Cuál fue la edad del guerrero a la hora de su muerte?

b) En una finca se encuentra un pozo de $125m$ de profundidad de donde se puede extraer agua. Para poner en funcionamiento el suministro de agua en la casa, primero se debe instalar una válvula de agua en el interior del pozo, ubicado a $42m$ de distancia de la superficie de la tierra. ¿Cuál es la distancia que separa el fondo del pozo de la válvula?

c) ¿Qué diferencia de temperatura soporta una persona que pasa del enfriador de carnes que está a 2ºC al enfriador del pescado congelado, que está a -16ºC? ¿Y viceversa? ¿Qué interpretación le da a cada uno de los eventos?

d) Un contador le indica a su jefe que los ingresos fueron de $\$1500$ *[en millones]* y que los gastos fueron de $\$1950$ *[en millones]*. ¿Qué se puede concluir respecto la utilidad de la empresa?

Producto

El producto entre números enteros obedece a la ley de signos que se extenderá a los reales. Las leyes de los signos quedan expresadas en términos de las siguientes identidades:

a) $(-1)a = -a$

b) $(-a)b = -(ab)$

c) $a(-b) = -(ab)$

d) $(-a)(-b) = ab$

Ejercicio 25 Con base en las leyes del producto, efectúa

a) $(3)(-2) = -(3 \cdot 2) = -6$

b) $5(-2)(-3)4 = 5(6)4 = 30 \cdot 4 = 120$

c) $3(-4)(-5) + 8(-5) =$

d) $(3 + (-4) + (-10) + 8)(-4 + 3) =$

e) $3(-8) + (-5)\big(-3 + (-8)\big) =$

f) $(-(-5) + 9)(-4) =$

g) $\big(2 - 5 + (-8)\big) \cdot (-3 - (-2) + 5)$

h) $-4 + (-3) \cdot (5 - (-2) + (-13) - 19)$

https://youtu.be/PV0gKR7KPkY
Video 3

Observación 4 Tenga en cuenta lo siguiente:

a) Respecto a notación: $-(-a) = a$.
► Escribe un ejemplo:

b) Ley distributiva:
$-(a + b + c) = -1(a + b + c) = -a - b - c$.
► Escribe un ejemplo:

c) $a + b - c = -(-a - b + c)$. ¿Por qué?
► Escribe un ejemplo:

2.2.3 Operaciones en $\mathbb{Q}$

Las operaciones entre racionales exigen claridad en la forma como se efectúa las operaciones entre números enteros.

Suma (Resta)

En la suma se identifican dos casos:

(ID) Igual denominador: Se aplica la regla

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

https://youtu.be/RY62fVL1XBo
Video 4

Por ejemplo:

a) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2+3-5}{5} = \frac{0}{5} = 0$

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$

(DD) Distinto denominador: Se aplica la regla

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Por ejemplo:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{8+15}{12} = \frac{23}{12}$

b) $1 + \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \left(\frac{5+3}{5}\right) - \frac{2}{7} = \frac{8}{5} - \frac{2}{7} = \frac{56-10}{35} = \frac{46}{35}$

Observación 5 Los siguientes son **errores** presentados al sumar racionales:

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2+5}{3+7} = \frac{7}{12}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$

Ejercicio 26. Practica suma de racionales a partir de los ejemplos anteriores.

a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}+\frac{8}{5}=$

b) $-\frac{3}{2}+\frac{8}{7}+\frac{1}{2}-3=$

c) $\frac{6}{5}-3-\frac{2}{7}=$

d) $\frac{3}{5}+5-\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=$

e) $1-\frac{5}{4}-\frac{3}{2}=$

f) $\frac{4}{9}-\frac{7}{5}+\frac{5}{6}=$

Producto

El producto está expresado por la siguiente regla:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Por ejemplo:

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{45}$

b) $\frac{4}{-5}\cdot(-7)=\frac{-28}{-5}=\frac{28}{5}$

c) $2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{-8}{7} = \frac{-80}{21} = -\frac{80}{21} = \frac{80}{-21}$

d) $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = \frac{1}{4}$

Ejercicio 27. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{-5} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) =$

b) $\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + 4\right) =$

c) $\left(\frac{-3}{2} + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{10}{7} - 4\right)$

d) $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{-5}$

e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{-3}{8} + \frac{-11}{3} \cdot \frac{-5}{9} =$

Observación 6 El número 1 es llamado neutro multiplicativo, puesto que cumple:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

para todo número x. Además, para cada número racional $x \neq 0$, observe que:

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

El numero $\frac{1}{x}$ se denomina inverso multiplicativo de x y se simboliza como x^{-1}.

Ejercicio 28. Con respecto a lo anterior, observa lo siguiente y responde:

a) $(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ ¿Por qué?

b) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ¿Por qué?

c) 0^{-1} no existe. ¿Por qué?

d) $1^{-1} = 1$ ¿Por qué?

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ ¿Por qué?

f) ¿Representan lo mismo las expresiones -3^{-1} y $(-3)^{-1}$? Justifica.

Cociente

A partir del inverso multiplicativo, definimos la división en $\mathbb{Q}$, como:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

En la práctica se emplea la regla:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Observación 7 Aquella famosa ley conocida como la ley de la oreja, corresponde a la división de fracciones, expresada anteriormente. Es decir,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo. 29. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{5} \div \frac{8}{7} =$

b) $\frac{-2}{11} - \frac{3}{5} \div \frac{8}{7} =$

c) $\left(2 \div \frac{7}{6}\right) \cdot \left(5 + \frac{3}{2}\right) =$

d) $\left[\left(\frac{-1}{6} + \frac{4}{3}\right) \div \frac{3}{2}\right] \div \frac{1}{2} =$

e) $\left[\left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-3}{7} + \frac{8}{9}\right)\right] \div \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2}\right) =$

https://youtu.be
/dfC0XPAZk0c
Video 5

Observación 8 Tenga en cuenta los siguiente:

a) $\frac{0}{a} = 0$ siempre que $a \neq 0$

►Escribe un ejemplo:

b) $\frac{0}{0}$ no existe.

►Escribe un ejemplo:

c) El opuesto de $\frac{a}{b}$ tiene varias formas de escribirse:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

►Escribe un ejemplo:

Note que el signo menos se le puede asignar al numerador o al denominador o a la fracción.

d) Todo número entero a también es un racional, pues $a = \frac{a}{1}$.

►Escribe un ejemplo:

e) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

►Escribe un ejemplo:

f) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ Esto, pues, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$.

►Escribe un ejemplo:

g) $\frac{a}{a} = 1$ para todo entero distinto de cero. De esta observación debe tener en cuenta que $\frac{0}{0} \neq 1$.

►Escribe un ejemplo:

i) Con los racionales podemos efectuar dos procesos, los cuales son:

Amplificación: Consiste en multiplicar numerador y denominador por un mismo número distinto de cero. Por ejemplo, amplificar $\frac{2}{5}$ en un factor de 8 corresponde a multiplicar por 8 numerador y denominador, es decir,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40}$$

Ejercicio 30. Amplifica la fracción $\frac{7}{9}$ a una fracción con denominador 81.

Simplificación: Consiste en dividir numerador y denominador entre un mismo número distinto de cero. Por ejemplo,

$$\frac{40}{36}=\frac{20}{18}\ o\ \frac{60}{24}=\frac{30}{12}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

Ejercicio 31. Simplifica al máximo la expresión $\frac{150}{54}$.

Diremos que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, en símbolos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ sí y sólo si el producto de los medios $(a\ y\ d)$ es igual al producto de los extremos $(b\ y\ c)$, es decir, $ad=bc.$ Una forma de obtener fracciones equivalentes es a través de la amplificación o simplificación. Por ejemplo, al amplificar $\frac{1}{3}$ en un factor de 3, queda $\frac{3}{9}$ (al simplificar la última regresamos a la primera fracción).

Estas son equivalentes, pues $1\cdot 9=9=3\cdot 3$.

Ejercicio 32. Determina si es posible, el valor que debe tomar la variables para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{4}{3}=\frac{k}{9}$ c) $\frac{5}{7}=\frac{k}{k}$

b) $\frac{4}{k}=\frac{k}{4}$ d) $\frac{4}{9}=\frac{3}{k}$

Ejemplo. La suma $\frac{7}{4}+\frac{1}{12}-\frac{8}{15}$ se desarrollará a través de la técnica del mínimo común múltiplo. Estas tres fracciones tienen distinto denominador. Debemos convertirlas en tres fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Este nuevo denominador será el mínimo común múltiplo de los denominadores. Al hallarlo, tenemos que m.c.m. (4,12,15) =60. Entonces amplificamos la primera fracción en un factor de 15, la segunda en un factor de 5 y la última en un factor de 4, teniendo como resultado tres fracciones equivalentes con denominador 60.

- ✓ $\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{105}{60}$
- ✓ $\frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{5}{60}$
- ✓ $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}$

Ahora, $\frac{7}{4} + \frac{1}{12} - \frac{8}{15} = \frac{105}{60} + \frac{5}{60} - \frac{32}{60} = \frac{105+5-32}{60} = \frac{78}{60} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10}$.

Ejercicio 33. Resuelve teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

a) $\frac{2}{7} - \frac{1}{28} + 3 =$

b) $\frac{2}{3} - \frac{5}{15} + \frac{8}{20} =$

c) $1 + \frac{5}{3} - \frac{8}{7} =$

d) $\frac{-5}{8} - \frac{3}{9} + \frac{1}{11} =$

Ejercicio 34. Resuelve los siguientes problemas:

a) ¿Cuáles son los tres quintos de la cuarta parte de $\$1500000$?

b) Para preparar un pastel, se necesita: $\frac{1}{5}$ de kilo de azúcar, $\frac{2}{7}$ de un kilo de harina y $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de $250grs$. ¿Cuánto suman los gramos de material utilizados para preparar el pastel?

c) Un envase contiene $380lts$ de jugo y se consume $\frac{3}{5}$ de su contenido. ¿Cuántos litros de jugo se consumió y cuántos litros quedan?

d) Un experto en bebidas decide mezclar lo siguiente: Dos botellas de $1\frac{1}{2}$ $litro$ de agua, 2 botellas de $\frac{1}{3}$ de litro de zumo de limón y 3 jarras de granadina de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de líquido contiene la mezcla? Expresa el resultado con un número mixto.

e) Un cable de red de $72m$ de longitud se corta en dos partes. Uno tiene las $\frac{4}{5}$ partes del cable. Halla la medida de cada pedazo.

f) Un vendedor de aparatos electrónicos tuvo como ingresos consecutivos mensuales $\$1550000$, $\$1700000$ y $\$1930000$. ¿Cuál fue el promedio de sueldos durante los tres meses?

g) El promedio de tres calificaciones es 3.1 aproximadamente. Se conoce que dos de las calificaciones son 3.5 y 3.0. Halle la tercera calificación.

h) Determine la medida en metros, lo correspondiente a $\frac{3}{7}$ de 4 kilómetros.

2.2.4 Operaciones en $\mathbb{I}$

A diferencia de sumar en $\mathbb{Q}$, con los números irracionales ocurre que los resultados de las operaciones no se dan de forma exacta. Por el contrario, hay que recurrir a una serie de aproximaciones que en ocasiones conducen a errores, a no ser que se pida una aproximación con un cierto número de cifras decimales, o, por el contrario, hay que dejar indicada la respuesta, pues como sabemos, los números irracionales en su forma decimal se caracterizan por tener su parte decimal infinita no periódica.

Ejemplo. Las siguientes operaciones nos muestran cómo se puede expresar el resultado de operar números en $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{2} - 1 + 2^{\sqrt[3]{5}} - 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 2^{\sqrt[3]{5}} =$

$-\frac{1}{2} - 2\sqrt{2} + 2^{\sqrt[3]{5}}$

c) $\pi - \sqrt[5]{32} + \sqrt[4]{32} = \pi - 2 + \sqrt[4]{32}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt[3]{9}$ *[Queda indicado]*

Ejercicio 35. Resuelve las operaciones con base en los valores dados para a, b, c. Escribe en cada casilla el resultado de la operación.

a	b	c	$a+b+c$	$a^{-1}-(b-C)$	$2(-b-a)^{-1}$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$			

2.2.5 Operaciones en $\mathbb{R}$

Las operaciones en $\mathbb{R}$, corresponden a las operaciones descritas anteriormente. Nos interesa formular las propiedades que satisfacen dichas operaciones, las cuales deben ser comprendidas por el estudiante, pues su uso es necesario en el curso.

Propiedades de Números Reales

Aunque se han citado de manera aislada las propiedades a lo largo de esta sesión, a continuación, se resume las propiedades de los números reales, para todo a, b, c:

(AR1) Clausurativa para suma y producto.

- $a+b \in \mathbb{R}$
- $ab = a \cdot b = a \times b \in \mathbb{R}$

(AR2) Asociativa para suma y producto.

- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $(ab)c = a(bc)$

(AR3) Conmutativa para suma y producto.

- $a+b = b+a$
- $ab = ba$

(AR4) Modulativa para la suma. Existe un número, llamado cero, simbolizado como 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

(AR5) Existencia de inverso aditivo. Para todo número $a \in \mathbb{R}$ existe otro número llamado inverso aditivo de a, simbolizado como $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(AR6) Modulativa para el producto. Existe un número, llamado uno, simbolizado como 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(AR7) Existencia de inverso multiplicativo o recíproco. Para todo $0 \neq a \in \mathbb{R}$, existe otro número llamado inverso multiplicativo de a, simbolizado $a^{-1} = \frac{1}{a}$ que satisface: $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

(AR8) Multiplicación por cero.$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, es decir, todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

(AR9) Distributiva del producto con respecto la suma.

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Ejemplo.

Resolver $-\left[\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{7}{6}}{3+\frac{1}{1+0{,}04}}\right]^{-1}$

Primero, tenga en cuenta que $0{,}04 = \frac{4}{100}$. En jerarquía se resuelve primero la multiplicación. Entonces:

$$-\left[\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{7}{6}}{3+\frac{1}{1+0{,}04}}\right]^{-1} = -\left[\frac{\frac{1}{12}-\frac{7}{6}}{3+\frac{1}{1+\frac{4}{100}}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{\frac{1}{12}-\frac{7}{6}}{3+\frac{1}{\frac{104}{100}}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{\frac{1}{12}-\frac{7}{6}}{3+\frac{1}{\frac{100}{104}}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{\frac{1}{12}-\frac{7}{6}}{\frac{312+100}{104}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{\frac{1-14}{12}}{\frac{412}{104}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{\frac{-13}{12}}{\frac{412}{104}}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{-13\times 104}{12\times 412}\right]^{-1}$$

$$= -\left[\frac{-1352}{4944}\right]^{-1}$$

$$= -\left[-\frac{4944}{1352}\right]$$

$$= \frac{4944}{1352}$$

$$= \frac{618}{169}$$

Ejercicio 36. Resuelve los siguientes problemas. Responde de forma clara.

a) Dos carros salen de un mismo punto y a la misma hora para recorrer una pista circular. El automóvil A tarda 2 horas en dar la vuelta y el automóvil B tarda 3 horas en dar la vuelta. ¿Cuántas horas tendrán que pasar para que los carros se encuentren en el punto de partida? ¿A cuántos minutos corresponden?

b) En un reservorio hay 800 millones de litros de agua. Por la parte oeste ingresa 25 millones de litros por hora y por la parte este, salen 30 millones de litros por hora. ¿Cuántos litros de agua habrá en el reservorio después de 15 horas de funcionamiento?

c) De una bolsa de 150 chupetas, Juana se comió $\frac{2}{3}$ de las chupetas y Raúl $\frac{1}{5}$. Halle la cantidad de chupetas que se comieron entren los dos. ¿Qué fracción de chupetas se comieron entre las dos?

d) Dos motos A y B hacen un mismo trayecto de $580\ km$. La moto A ha recorrido $\frac{5}{10}$ del trayecto cuando la moto B ha recorrido $\frac{5}{11}$ del trayecto. ¿Cuál de las dos va primero? ¿Cuál es la distancia que separa ambas motos?

e) Las calificaciones de quices de un curso de inglés son: 2.5, 3.8, 4.8 y 3.2. Obtenga el promedio de los quices.

f) El promedio de cuatro quices en un curso de astronomía fue de 3,7. Si la menor nota fue 2,4 y esta se elimina, ¿cuál es el promedio de los quices restantes?

g) Determine el peso en kilogramos de un objeto que tiene un peso de 320 gramos. Escriba una expresión para determinar el peso en kilogramos de un objeto que pesa m gramos.

h) Juana tiene $\$1545000$ y para viajar a cierta ciudad de Europa le exigen llevar €35 euros por día. Juana estará alrededor de 7 días y se está preguntando si le alcanza el dinero que tiene para viajar. ¿Le recomendarías a Juana que consiga dinero prestado para completar? [Sugerencia: $1(EUR) = 3410(COP)$].

i) En un supermercado venden gaseosa en dos presentaciones: Botella de litro en $\$2300$ y botella de litro y cuarto en $\$2800$. Max desea comprar 5 litros de gaseosa. ¿Cuál es la opción más recomendable?

j) En una finca cafetera, los recolectores tienen una jornada de trabajo de 8 horas de lunes a sábado. Todo trabajo adicional es tiempo extra y se lleva un registro por trabajador. El administrador paga el salario mínimo legal vigente de la siguiente forma:

- El salario mínimo actual vigente por jornada laboral.
- El doble por hora extra entre lunes y viernes.
- El triple por tiempo extra el sábado y domingo.

Teniendo en cuenta el siguiente registro de horas trabajadas, responda:

Tabla 1. Horas diarias de trabajo

Recolector	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
Aguilar	8.0	0.0	11.0	12.5	7.5	8.0	7.0
Bermúdez	12.0	8.5	11.5	0.0	7.0	8.0	8.0
Margarita	10.5	8.0	11.0	8.0	0.0	8.0	6.0
Gaviota	5.5	5.5	12.0	8.0	9.5	9.0	7.0
Guevara	8.0	8.0	0.0	8.0	11.0	10.0	0.0
Jöns	11.5	1.5	8.0	9.5	10.5	11.0	0.0
Hanz	0.0	4.5	8.0	8.0	8.0	12.0	3.0

i. ¿Qué trabajador ha laborado el mayor número de horas de trabajo semanalmente?

ii. ¿Cuál es el que laboró el menor número de horas extras?

iii. ¿Cuánto ganó Bermúdez por su horario normal?

iv. ¿Cuánto pago la administración a la semana a los jornaleros?

v. ¿Cuál fue el gasto por horas extras?

vi. Por el horario normal ¿cuánto pagó la administración?

vii. Sí estos empleados trabajaran bajo el mismo ritmo durante un mes. ¿Cuál sería la nómina que pagar mensualmente? ¿Cuánto al año?

CAPÍTULO 3. CÁLCULOS CON LOS NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 3.

CÁLCULOS CON LOS NÚMEROS REALES

Las razones y proporciones, como objeto de comparación entre magnitudes, son importantes en la solución de problemas en los cuales se puede aplicar la regla de tres simple y compuesta. Nos restringimos a trabajar la regla simple. Dejamos al lector la solución de los siguientes ejercicios como motivación para el presente capítulo.

a) Teresa trabajó 3 horas y ganó $8100. ¿Cuánto tiempo le tomará ganar $27000?

b) El año pasado se limpió un canal en 27 días con 60 obreros. Este año se quiere hacer el mismo trabajo en sólo 13 días. ¿Cuántos obreros aproximadamente hay que contratar?

c) María hace un jugo con 6 litros de agua y 4 litros de leche. ¿Cuál es el porcentaje de leche que hay en el jugo? Si María desea preparar 25 litros de jugo, ¿cuántos litros de agua y leche debe emplear?

d) En un laboratorio hay un cultivo de 150000 bacterias. Debido a una enfermedad desaparece el 12% de la población. Gracias a un producto que trata las bacterias supervivientes, logran aumentar la población en un 14%. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

3.1 Razones y Proporciones

Sí $a, b \in \mathbb{R}$ y $a, b \neq 0$, se llama razón r al cociente exacto (sin redondear) de a y b , es decir,

$$\frac{a}{b} = r \in \mathbb{R}$$

En esta razón, a es el antecedente y b es el consecuente.

Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de razones:

a) $\frac{5}{2}$ se lee "5 es a 2" y también se puede escribir 5:2.

b) $\frac{\sqrt{5}}{7}$ donde $\sqrt{5}$ es el antecedente y 7 es el consecuente.

c) $\frac{-23}{57}$ donde -23 es el antecedente y 57 es el consecuente.

d) $\frac{-2,\overline{12}}{5}$ donde $-2,\overline{12}$ es el antecedente y 5 es el consecuente.

Las razones permiten comparar dos magnitudes. Por ejemplo, una de cada cien personas posee el virus del Zika, es decir, 1/100 equivalente al 1% de la población. Pues:

- ✓ $\frac{1}{100} = 0.01$ *[La razón]*
- ✓ Esta razón la multiplicamos por 100 y obtenemos el 1%.

Ejercicio 37. Responda:

a) ¿Es toda razón un número racional?

b) ¿Es todo número racional una razón?

c) En una razón de 0.25, el consecuente es 8. ¿Cuál es el antecedente?

d) En una razón de 0.32, el antecedente es 2. Determine el consecuente.

e) En un curso de razonamiento cuantitativo con 28 alumnos, 12 reprobaron. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de aprobados y la cantidad de alumnos del curso?

f) El área total construida de un terrero es de $240m^2$ y el área libre de $60m^2$. ¿Cuál es la razón entre el área construida y el área del terreno total?

g) ¿Cuál es la razón entre la cantidad de hombres y mujeres en el curso de razonamiento cuantitativo de 45 estudiantes si la tercera parte son mujeres?

h) La razón entre la cantidad de mujeres y la cantidad de hombres de una población total de 40 personas, en donde hay 15 hombres es:

i. $\frac{40}{25}$ ii. $\frac{15}{25}$ iii. $\frac{25}{15}$ iv. $\frac{25}{40}$

3.2 Proporciones

Iniciemos el estudio de proporciones con la siguiente situación y responde:

Ejercicio 38. Si compras una torta y la divides en dos partes iguales y te comes una, ¿Cuál es la razón que representa la parte que te comiste? Si a la misma torta, ahora la divides en cuatro partes y te comes dos de ellas, ¿qué razón representa la parte que te comiste? La parte que te comiste inicialmente y al final, ¿son la misma porción? ¿Por qué? Justifica y representa gráficamente.

Una proporción es una igualdad entre dos razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La expresión anterior se lee "a es a b cómo c es d". Los números $a, d,$ se llaman extremos y los números b, c son llamados medios.

Ejemplo. "Tengo dos de los cuatro productos recomendados" equivale a la expresión "tengo uno de dos de los productos recomendados", esto es, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Ejemplo. Puedes verificar las siguientes proporciones (Usa la calculadora):

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ b) $\frac{0.2}{5} = \frac{2}{50}$ c) $\frac{10}{3} = \frac{0.3}{0.09}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

¿Cómo darnos cuenta de que dos razones forman una proporción? Pues, observa que en $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$, los extremos 4 y 18 al multiplicarse dan el mismo resultado que al multiplicar los medios 9 y 8. Así, en toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Es decir,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo. Algunas proporciones aplicando la regla anterior:

a) $\frac{115}{-45} = \frac{-46}{18}$, pues $(115) \cdot (18) = (-45) \cdot (-46) = 2070$

b) $\frac{0,2}{3} = \frac{2}{30}$, pues $(0.2) \cdot (30) = (3) \cdot (2) = 6$

c) $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$, pues $(1) \cdot (15) = (5) \cdot (3) = 15$

https://youtu.be/tu29lqTSHFM
Video 6

Ejercicio 39. Use la propiedad de las proporciones para resolver lo siguiente:

a) Compruebe que $\frac{15}{8} = \frac{30}{16}$ y encuentre otras proporciones que pueden formarse a partir de esta proporción.

b) ¿Forman las razones $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{4}$ una proporción?

c) En un curso de ecosistemas la razón entre la cantidad de mujeres y hombres es 2:4. Si la cantidad de mujeres es 14, ¿cuántos alumnos hay en el curso?

d) Dos personas se reparten $320000 a una razón de $\frac{3}{2}$.¿Cuánto dinero recibe cada uno?

e) Si en un juzgado hay 2 jueces por cada 10 personas, pero el cambio de dirección obliga a las autoridades a oficializar 4 jueces por cada 15 personas, ¿se sigue conservando la celeridad en los procesos?

f) Hallar el valor desconocido x para formar proporciones.

i. $\frac{x}{5} = \frac{7}{9}$ ii. $\frac{2{,}1}{3} = \frac{7}{x}$ iii. $\frac{\frac{2}{3}}{x} = \frac{13}{5}$ iv. $\frac{2{,}7}{3{,}5} = \frac{x}{17}$

3.3 Proporción Directa e Inversa

El peso de un cuerpo, la longitud, el tiempo, el volumen, la superficie, la velocidad, el trabajo son “magnitudes”. De esas magnitudes, podemos dar “cantidades”. Por ejemplo: de la magnitud tiempo: 4 horas; de la magnitud longitud: 25 centímetros; etc. Además, dos magnitudes pueden estar directamente relacionadas, es decir, que las dos magnitudes aumentan o disminuyen simultáneamente; o, por el contrario; relacionadas inversamente, es decir, que mientras una aumenta (resp. disminuye) la otra magnitud disminuye (resp. aumenta). Lo anterior se conoce como proporcionalidad directa e inversa respectivamente.

Ejercicio 40. Responde y justifica en cada caso:

a) ¿Considera que el tiempo y la edad de una persona son inversamente proporcionales?

b) ¿Considera que el tiempo de trabajo y los niveles de estrés sean directamente proporcionales?

c) ¿Considera que el tiempo de vida de una persona y su estatura son directamente proporcionales?

d) ¿Considera que el trabajo realizado por una persona y el tiempo empleado son magnitudes directamente proporcionales?

Al tener un problema de magnitudes relacionadas surge la duda en determinar la naturaleza de si la relación es inversa o directa. La respuesta a esta pregunta no la tenemos, sólo podemos afirmar que hay que pensar en la situación y deducir a partir de la experiencia si tal relación entre magnitudes es directa o inversa.

Proporción Directa. Dos magnitudes x y y son *directamente proporcionales* cuando la razón $\frac{x}{y}$ de sus medidas es constante. Es decir, si x es directamente proporcional a y, entonces $\frac{x}{y} = k$ o también $x = k.y$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo. Se desea saber cuántos "x" galones de pintura se requieren para pintar 7 habitaciones si se conoce que se requieren 8 galones para dos habitaciones.

8 galones → 2 habitaciones
x galones → 7 habitaciones

En proporciones $\frac{2}{8} = \frac{7}{x}$ o $\frac{8}{2} = \frac{x}{7}$. La solución es $2x = 7 \cdot 8 = 56$, es decir, $x = 28$

Ejercicio 41. Resuelve los siguientes problemas.

a) En una tienda de telas, $8mts$ de lino cuesta $\$56000$. ¿Cuánto cuesta $17mts$ de la misma tela?

b) Un auto se desplaza $320\, metros$ en 20 segundos. ¿Qué distancia recorre en 1 hora a velocidad constante?

c) Seis excavadores abren un hueco de $230mts$ de longitud en 3 días. ¿Cuántos metros cavarán en 3 días, 28 excavadores bajo las mismas condiciones?

d) Al llegar al hotel nos han dado un mapa con los lugares de interés de la ciudad, y nos han dicho que 5 centímetros del mapa representan 600 metros de la realidad. Hoy queremos ir a un parque que se encuentra a 8 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este parque?

i. 600 ii. 15 iii. 375 iv. 960

Ahora, por ejemplo, tomemos la medida de los lados de un rectángulo que tiene un área fija de $25m^2$. Para mantener el área fija mientras aumenta la magnitud de un lado, el otro lado debe disminuir en magnitud. Esto indica que las medidas de los lados son inversamente proporcionales.

Proporción Inversa: Dos cantidades son *inversamente proporcionales* cuando el producto de sus medidas es constante. Diremos que x es inversamente proporcional a y, si $x \cdot y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo. En una fábrica, 20 máquinas realizan un trabajo en 1600 horas. ¿Cuánto tardarían en efectuar ese mismo trabajo 36 máquinas?

$$20 \text{ máquinas} \rightarrow 1600 \text{ horas}$$
$$36 \text{ máquinas} \rightarrow x \text{ horas}$$

Al utilizar la definición, $20 \cdot 1600 = 36 \cdot\ x$. Al despejar la variable queda, $x = \frac{20 \cdot 1600}{36} = \frac{32000}{36} = 889$. Es decir, aproximadamente 889 horas.

Ejercicio 42. Resuelve:

a) Si 25 máquinas producen cierta cantidad de tela en 500 horas. ¿Cuántas horas aproximadamente demoran 50 máquinas idénticas en producir la misma cantidad de tela?

b) La rapidez de un auto es de 80 km/h y demora 6 horas en recorrer cierta distancia. ¿Cuántas horas aproximadamente demora en recorrer la misma distancia otro auto con una rapidez de 90 km/h?

c) En una empresa de correspondencia 20 motoristas tardan 15 días en realizar un servicio. ¿Cuántos días aproximadamente tardarán 28 motoristas en realizar el mismo servicio?

d) Si 3 personas desarrollan una jornada de vacunación en hora y media, ¿qué tiempo aproximado emplearán 5 personas en elaborar la misma actividad?

e) Cuatro pintores decoran una casa en 8 días. El número aproximado de días que demoran 12 pintores en decorar la misma casa conservando el mismo ritmo es:

i. 6 ii. 3 iii. 4 iv. 2

f) Cuatro investigadores cierran un caso en 6 días. El número de días que demoran 12 investigadores en estudiar el mismo caso bajo las mismas condiciones es:

i. 4 ii. 12 iii. 2 iv. 8

3.4 Porcentaje

El porcentaje es una forma de comparar cantidades, es una unidad de referencia que relaciona una parte con el todo, considerando como unidad la centésima parte del todo (el todo es siempre 100). Así, cuando sabemos que el valor de cierto producto es $\$75000$ (“el todo”) y si en oferta ofrecen el 30% de descuento, sabemos que el descuento en pesos es de $\$22500$ “lo que nos ahorraríamos” y el valor del producto en oferta es de $\$52500$.

Definimos el porcentaje mediante la siguiente proporción

$$\frac{Todo}{100\%} = \frac{Parte}{Porcentaje}$$

https://youtu.be/_cmKH6Yk3lA
Video 7

Tienes dos formas de representar en los cálculos el porcentaje. Si tienes x % también tienes $\frac{x}{100}$. Es decir, que si a representa una cantidad arbitraria, entonces el x % de a se calcula como

$$a \cdot x\ \% = a \cdot \frac{x}{100} = \frac{ax}{100}$$

Así, el 30% de \$75000 se calcula como $75000 \cdot 30\%$ o mejor aún $\frac{75000 \cdot 30}{100} = 22500$.

Ejercicio 43 Con base en lo expuesto y sin uso de la calculadora, resuelve:

a) El precio de una habitación en un hotel es \$35000 pesos por día. Los fines de semana se incrementa en un 30% el valor. ¿Cuál es el valor del incremento? ¿Cuánto paga por el fin de semana? FDS=viernes, sábado y Domingo.

b) Un apartamento está valorado en \$150 millones de pesos. Se proyecta un incremento anual del 3%. ¿Cuánto costará en 3 años?

c) Los cuidados postoperatorios en cierta clínica tienen un costo de $650000 por día. El tener un plan complementario de salud le da un descuento de 20% sobre esta tarifa. ¿Cuál es el descuento realizado y costo a pagar a una persona que debe quedarse 5 días en la clínica y quien se encuentra afiliado al plan complementario?

d) Unos tenis deportivos cuestan $370000 pesos y tienen un descuento del 30%.

   a) ¿Cuál es el valor descontado?

   b) ¿Cuánto hay que pagar?

   c) Si un día pagara $345000, ¿Aproximadamente cuál es el porcentaje descontado?

e) Un artículo cuesta $120000 y ante la alta demanda, sube 12%. Cuando se reduce la demanda, se rebaja un 12%. ¿Sigue costando lo mismo que antes?

f) Un curso se califica con parciales del 35% cada uno y quices el 30%. En el primer parcial un estudiante obtuvo 2.5 y el promedio de quices lo tiene en 3.8. ¿Cuánto debe obtener como calificación en el segundo parcial para aprobar la asignatura en 3.0?

g) La matrícula a cierta carrera tiene un costo de $4500000. El pagar de forma extemporánea le genera un recibo con pago de $4750000. Aproximadamente, ¿cuál fue el porcentaje de incremento y de cuánto fue dicho incremento?

h) En una empresa de Televisores, Juan devenga $3500000, María $2800000 y Marcos $4200000 por venta de televisores FHD. Para disminuir los gastos de la empresa, esta espera disminuir los gastos de nómina en un 35% del promedio del sueldo mensual actual. ¿Cuál es el monto que espera recortar de sueldo la administración de la empresa?

i) ¿Quién es mayor, el 20% del 50% de 80% o el 250% del 5% de 50?

j) Un diseño publicitario se cobra a $23500 por metro cuadrado. Un usuario, quien desea un trabajo de 45 metros cuadrados, recibe el 5% de descuento por pagar antes del 8 de octubre del 2018. En caso de pagar con tarjeta de crédito, le cobran el 2% sobre el valor pagado. Si el usuario decide pagar con tarjeta de crédito, ¿finalmente cuanto pagó si cancela hoy 7 de octubre? ¿cuánto debe pagar con tarjeta de crédito si paga el 14 de octubre?

k) Una carga de 24 cajas pesa en total 1200 kilogramos y no puede ser cargada en el camión, ya que su capacidad es del 75%. ¿Cuántas cajas puede llevar el camión?

l) Una moto está valorada sin IVA del 16%, en $4500000 *[pesos]*. El vendedor le dice que puede hacerle una rebaja del 15%. Calcula su costo final.

m) Un abogado reconocido de la ciudad lleva un caso en el que le pagarán el 15% cuando finalice el proceso. Este consiste en cobrar una pensión que salió para el mes de marzo de 2016 por valor de $1.115.000 y se espera que para agosto de 2017 lleguen a un acuerdo con la entidad promotora de pensiones. Si el abogado cierra el acuerdo con la empresa, ¿cuál es el valor que recibe el abogado por honorarios?

n) En un laboratorio clínico harán pruebas de virus a 37 personas. Finalizando la jornada diagnostican 28 de ellas con virus. El porcentaje aproximado de personas sanas es:

i. 14% ii. 32% iii. 76% iv. 24%

o) En una compraventa le prestan dinero a Alex con el compromiso de pagar el 2% diario sobre lo que presta. Si le prestan $50000 por 8 días, el dinero que paga por interés es:

i. $8000 ii. $800 iii. $50800 iv. N.A.

p) Un estudiante de medicina paga por su matrícula $4600000. El pago extemporáneo le genera una matrícula por valor de $4720000. El porcentaje aproximado de incremento es:

i. 2,6% ii. 2,5% iii. 9,7% iv. N.A.

q) Al comprar una casa en cuotas, el banco ofreció un crédito de 12 años a cuotas fijas mensuales de $1000000. Si al contado el precio es de $10000000, el porcentaje de recargo que aplica el banco es:

i. 20% ii. 22% iii. 88% iv. N.A

r) En una población de 120 personas y donde hay 48 mujeres, hay 4 mujeres con gripe y la cantidad de hombres con gripe corresponde a la cuarta parte de la cantidad de hombres. El porcentaje aproximado de personas con gripe es:

i. 15% ii. 3,3% iii. 18,3% iv. 63,3%

s) Cuatro personas juntan sus capitales para iniciar un negocio y aportan cada uno el 15, 20, 25 y 40%, respectivamente del monto total. La menor de las aportaciones fue de 9 millones. La mayor aportación en millones fue de:

i. 10,5 ii. 12,0 iii. 24 iv. 60

CAPÍTULO 4. EXPONENTES

CAPÍTULO 4.

EXPONENTES

Los exponentes son importantes en la representación y solución de problemas de distinta naturaleza, como por ejemplo; la representación de cantidades pequeñas o grandes a través de la notación científica, el cálculo de interés simple o compuesto en inversiones hechas en fondos de inversión, el cálculo o representación de crecimiento o decrecimiento de población, simplificación de operaciones realizadas en el álgebra o contexto de funciones, problemas asociados a las ciencias o ingeniería que requieran el cálculo de raíces o manejo de exponentes en general. Se hace necesario entonces que las propiedades de los exponentes sean comprendidas en su totalidad para facilitar los cálculos.

4.1 Exponentes enteros

En esta sección estudiamos las potencias enteras y las operaciones que entre estas se puedan efectuar, así como las propiedades de las operaciones. Para iniciar, observa como a partir de la suma de cantidades iguales se define la multiplicación,

$$\underbrace{3+3+3+3+3+3}_{5-veces} = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

Es decir,

$$\underbrace{b+b+b+\cdots+b}_{n-veces} = b \cdot n = n \cdot b$$

Por otra parte, el producto de factores iguales genera la potenciación de la siguiente forma:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Es decir, si $b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, la n-esima potencia de b es:

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n-veces}$$

En la expresión b^n , b es la **base** y n el **exponente**.

Tenga en cuenta lo siguiente:

Los estudiantes suelen confundir el desarrollo de $4^3 = 64$ y piensan que la solución es $4^3 = 4 \cdot 3 = 12$.

En la definición anterior, el exponente debe ser positivo para resolver la operación. Por ejemplo, $2^3 = 8$ mientras que 2^{-3} no se puede resolver a partir de la definición, esto es, pues el exponente al ser un número que cuenta las veces que se multiplica la base por sí misma, debe ser positivo.

Ejemplo. A continuación se determina el resultado de algunas potencias.

a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) $(-2^5) = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

c) $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$

e) $(\pi)^4 = \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi$

Ejercicio 44. Con base en lo anterior, resuelve:

a) Escribe la expresión $\left(\frac{-1}{2}\right)^3$ como producto.

b) Escribe $(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$ como potencia.

c) Resuelve las siguientes potencias:

i. $(-3)^4 =$

ii. $\left(\frac{-2}{7}\right)^3 =$

iii. $(-7)^2 =$

iv. $\left(\frac{-3}{5}\right)^2 =$

v. $(-2)^3 =$

vi. $\left(\frac{2}{-3}\right)^4 =$

vii. $0^3 =$

viii. $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 =$

ix. $-3^2 =$

x. $(-3)^2 =$

Observación 10 Para tener en cuenta

- ✓ Debemos tener cuidado cuando el exponente es 0.
  Sí $b \neq 0$, entonces $b^0 = 1$. Por ejemplo, $2^0 = 1$.
  0^0 no está definida.

Ejercicio 45. Teniendo en cuenta lo anterior, resuelve:

a) $(-2)^0 =$

b) $(1 + (-5 + 4))^0 =$

c) $(5 + (-5))^0 =$

d) $5 + (-5)^0 =$

e) $-20^0 =$

f) $(-20)^0 =$

g) $a^0 =$

h) $\left(-\sqrt{2}\right)^0 =$

Propiedades de los Exponentes. A la hora de hacer cálculos que involucren exponentes es bueno contar con propiedades que permitan disminuir el número de pasos al simplificar expresiones con exponentes.

Propiedades. Para $n, m \in \mathbb{Z}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

(Ex.1) $a^m a^n = a^{m+n}$.

Ejemplo. $10^3 \cdot 10^2 = 10^5$.

Ejercicio 46. Simplifica:

a) $5^6 \cdot 5^9 \cdot 5^{-8} =$

b) $2^4 \cdot 7^9 \cdot 2^8 \cdot 7^2 \cdot 5^6 =$

(Ex.2) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Ejemplo. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

Ejercicio 47. Simplifica:

a) $(3^4)^3 =$

b) $((10^2)^3)^4 =$

(Ex.3) $(ab)^n = a^n b^n$.

Ejemplo. $(3 \cdot 5^2)^3 = 3^3(5^2)^3 = 3^3 \cdot 5^6$

Ejercicio 48. Elimina paréntesis empleando la propiedad citada anteriormente:

a) $(2 \cdot 5)^3 =$

b) $(2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^4)^2$

Observación 11 La propiedad anterior indica que puedes distribuir el exponente a factores y únicamente a factores. Esta distribución de exponente no se debe hacer con sumandos. Es decir, **no es cierto** lo siguiente:

$$(2+4)^2 = 2^2 + 4^2 \quad o \quad (6+1)^3 = 6^3 + 1^3$$

(Ex.4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Ejemplo. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

Ejercicio 50. Simplifica:

a) $\left(\frac{-4}{7}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{10}{3}\right)^4 =$

c) $\left(\frac{2^3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{2^4}{5^3}\right)^3 =$

Ahora cuando trabajemos con exponentes negativos debemos usar la propiedad siguiente: Para todo número real $b \neq 0$,

$$b^{-1} = \frac{1}{b}$$

Ejemplo. Las anteriores propiedades permiten calcular por ejemplo 4^{-3}

$$4^{-3} = 4^{(-1)(3)} = (4^{-1})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

En este ejemplo, se emplearon diversas propiedades. Se puede simplificar el procedimiento operando de la siguiente forma:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Las siguientes propiedades deben ser tratadas como las anteriores.

Propiedades. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces:

(Ex.5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ejemplo. $2 \cdot 4^{-3} \cdot 7^4 \cdot (-2)^{-2} = \frac{2 \cdot 7^4}{4^3(-2)^2}$

Ejercicio 51. Ahora resuelve:

a) $3^{-4} =$

b) $(-1)^{-1}$

c) $3^{-2} + 5^{-1} + \frac{1}{3}$

d) $\frac{2^{-2}-3^{-1}}{3^{-2}-2^{-1}} =$

(Ex.6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Ejemplo. $\frac{2 \cdot 7^5}{7^3} = 2 \cdot 7^{5-3} = 2 \cdot 7^2$

Ejercicio 52. Simplifica:

a) $\frac{2^3}{2^2} =$

b) $\frac{5 \cdot 7^9}{3 \cdot 7^4} =$

c) $\frac{8 \cdot 9^4}{5 \cdot 9^{10}} =$

(Ex.7) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

Ejemplo. $\frac{3 \cdot 5^{-3}}{4^{-5}} = \frac{3 \cdot 4^5}{5^3}$

Ejercicio 52. Simplifica:

a) $\frac{3^{-4}}{4 \cdot 3^{-7}} =$

b) $\frac{5^6}{5^{18}} =$

c) $\frac{5^{-2}}{3^{-1}} + \frac{4}{3} =$

d) $\frac{(-2)^3-3^2}{(-1)^{-5}} =$

e) $\left(\frac{4^3 \cdot 7^{-2}}{10^{-6}}\right)^2 =$

(Ex.8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ejercicio 53. Simplifica:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} =$

b) $\left(\left(\frac{3}{10}\right)^{-5}\right)^{3} =$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2} =$

Ejemplo. Simplificar $\frac{\left((-3)^2\right)^3}{((-2)^3 5^2)^2} \div \left(\frac{\left((-2)^5 \cdot 3^2\right)^{-2}}{((-3)^3)^{-2}}\right)^{-4}$ empleando las propiedades expuestas anteriormente.

En la simplificación de la expresión, se emplean las propiedades necesarias mas no significa que se debe emplear todas las propiedades. Además, se debe tener en cuenta que el ejercicio de simplificación por parte de cada estudiante puede variar. Lo importante es llegar a su máxima simplificación y debe coincidir. A continuación, se escribe paso a paso el proceso de simplificación y se enuncia la propiedad empleada.

$$\frac{\left((-3)^2\right)^3}{((-2)^3 5^2)^2} \div \left(\frac{\left((-2)^5 \cdot 3^2\right)^{-2}}{((-3)^3)^{-2}}\right)^{-4} \qquad \text{[Inicial]}$$

$$= \frac{(-3)^6}{(-2)^6 \cdot 5^4} \div \left(\frac{(-2)^{10} \cdot 3^{-4}}{(-3)^{-6}}\right)^{-4} \qquad \text{[Ex 2]}$$

$$= \frac{(-3)^6}{(-2)^6 \cdot 5^4} \div \left(\frac{(-3)^{-6}}{(-2)^{10} \cdot 3^{-4}}\right)^{4} \qquad \text{[Ex 8]}$$

$$= \frac{(-3)^6}{(-2)^6 \cdot 5^4} \div \frac{(-3)^{-24}}{(-2)^{40} \cdot 3^{-16}} \qquad \text{[Ex 2]}$$

$= \frac{(-3)^6}{(-2)^6 \cdot 5^4} \div \frac{3^{16}}{(-2)^{40}(-3)^{24}}$ [Ex 5,7]

$= \frac{(-3)^6 \cdot (-2)^{40}(-3)^{24}}{(-2)^6 \cdot 5^4 \cdot 3^{16}}$ [División en $\mathbb{Q}$]

$= \frac{(-3)^{30} \cdot (-2)^{40}}{(-2)^6 \cdot 5^4 \cdot 3^{16}}$ [Ex 1]

$= \frac{(-3)^{30} \cdot (-2)^{34}}{5^4 \cdot 3^{16}}$ [Ex 6]

$= \frac{3^{30} \cdot 2^{34}}{5^4 \cdot 3^{16}}$ [Ley de signos]

$= \frac{3^{14} \cdot 2^{34}}{5^4}$ [Ex 6]

Ejercicio 54. Resuelve los siguientes ejercicios.

a) Determine el valor que debe tomar la letra x para que se dé la igualdad. En este caso, la letra x es la representación de un número entero.

i. $3^x = 243$ ii. $8^x = 1$ iii. $-x^x = -27$ iv. $x^0 = x$

b) Simplifica y resuelve en caso de que sea posible.

i. $(-3)^2 \cdot [(-3)^3 + (-2)^4 - 5^2] =$

ii. $(-4^3)^{-1} \cdot 2^3 \cdot 8^2 =$

iii. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - [(2-3)^3 \cdot (-9)^2] =$

iv. $-2^{-1}((2^3)^{-1} + 4^{-2} - (2 \cdot 3^{-1})^{-1}) =$

v. $\left(\frac{\left((5)^{-2}\right)^{-2}}{((-3)^{-3}10^{2})^{4}}\right)^{4} \div \left(\frac{\left(4^{3}\cdot 5^{-2}7^{-2}\right)^{-2}}{((-2)^{3})^{-2}}\right)^{-1} =$

c) En la mitología griega, la Hidra de Lerna es un antiguo monstruo acuático con forma de serpiente. La hidra tenía el poder de generar dos cabezas por cada cabeza que perdía o se le amputaba. Este monstruo podía tener tres, cinco o nueve (*quizá más*) cabezas. Suponiendo que esta tuviera una sola cabeza y un héroe intentara cortarle todas sus cabezas cada hora, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra al finalizar el día? ¿Cuántas al cabo de 5 días? ¿Cuántas al cabo de n días? Si tuviera inicialmente 3 cabezas, ¿Cuántas cabezas tendría al cabo de 5 días o al cabo de n días? Formula tu expresión.

d) Una puerta posee en vez de cerradura un candado con tres pestañas para colocar una combinación de cuatro números. ¿Cuántas formas posibles de combinaciones tiene el candado si las pestañas tienen los dígitos del cero al nueve cada una?

e) Un cultivo de bacterias crece y se triplica cada 2 horas. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de un día si inicialmente hay 10 bacterias? ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de n días si inicialmente hay x cantidad de bacterias? Formula una expresión matemática.

f) Debido a las altas tasas de interés, las inversiones de los usuarios tienden a disminuir. Esta se disminuye en un 50% cada mes. Si esta política se implementa desde el mes de julio de 2016 y se había calculado una inversión total por parte de los usuarios de $1200 millones de pesos promedio por cada mes al finalizar junio, ¿a cuánto habrá disminuido en promedio la inversión en los próximos 4 meses? Si la inversión fuera de x millones de pesos, ¿Cuál será el valor de la inversión promedio de los usuarios al cabo de n meses?

g) El isótopo de yodo 131 la cual es una cantidad radioactiva se descompone cada ocho días a la mitad de su valor anterior. Si el valor inicial es n, ¿qué parte de su valor inicial tendrá en 40 días?

h) Una inversión inicial I [*en millones*] que se deposita en una entidad bancaria se duplica cada 6 meses. ¿Cuál será el monto recibido al cabo de 4 años? ¿Al cabo de n años? Si la inversión inicial fue de $1200000, ¿A cuánto asciende su capital al cabo de 2 años?

4.2 Cálculo de raíces

Ahora trataremos con las raíces. Esto será necesario en la solución de problemas de aplicación, así como solución de ecuaciones cuadráticas en secciones posteriores. Cuando se estima una raíz, se está calculando una base.

En la notación $\sqrt[n]{x} = b$, debemos tener en cuenta que:

- ✓ n es lo que denominaremos el índice de la raíz. Este hace el papel de exponente en la solución que se encuentre.

- ✓ x es el radicando, es un número real y su signo dependerá de qué tipo de número sea n .

- ✓ b, constituye el resultado de la raíz, y debe ser tal que $b^n = x$, es decir, este resultado elevado al índice de la raíz debe ser igual al radicando.

Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de raíces.

a) $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3,$ pues $3^2 = 9$.

b) $\sqrt[3]{64} = 4$, pues $4^3 = 64$.

c) $\sqrt[4]{16} = 2$, pues $2^4 = 16$.

d) $\sqrt[5]{-32} = -2$ pues $(-2)^5 = -32$.

https://youtu.be
/2OAfa6MHVWM
Video 8

e) $\sqrt[4]{-81}$ no existe, pues toda potencia por es positiva.

f) $\sqrt[6]{64} = 2$ pues $2^6 = 64$.

Observación 12 Raíces pares e impares

- ✓ Si n es un número par, b^n es un número positivo, por lo tanto x debe ser positivo. Es decir, las raíces pares no admiten valores negativos.

- ✓ Si n es impar, no importa el signo del radicando.

- ✓ Es cierto que, cuando n es par, todo número tiene una raíz positiva y una negativa, aunque reservamos la notación $\sqrt[n]{}$ solo para la raíz positiva.

Ejercicio 55. Halla las siguientes raíces, siempre que sea posible:

a) $\sqrt{64} =$

b) $\sqrt{-81} =$

c) $\sqrt{x^4} =$

d) $\sqrt[3]{8} =$

e) $\sqrt[3]{-8x^{-6}} =$

f) $\sqrt{4} =$

g) $\sqrt[3]{-64} =$

h) $\sqrt{9x^4y^{-10}} =$

i) $\sqrt{x^{16}} =$

Ejercicio 56. Simplifique empleando las leyes vistas en clase:

a) $(-3)^4 =$

b) $x^3x^{-2}x^{-7} =$

c) $3^{-4} =$

d) $2^{-3}x^4 \cdot 2 =$

e) $-20^0 =$

f) $(x^{-2})^5 =$

g) $\sqrt{144} =$

h) $\sqrt[3]{8} =$

i) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 =$

j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} =$

k) $\frac{4}{2^{-3}} =$

l) $\sqrt[3]{-8} =$

m) $\left(\frac{2xy}{3}\right)^{-3} =$

n) $\frac{5 \cdot 3^{-2}}{4 \cdot 2^{-3}} =$

o) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{49} =$

4.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Ciertas áreas del conocimiento trabajan con magnitudes muy grandes (como distancia entre estrellas) o muy pequeñas (como el peso de ciertos elementos en la tabla periódica). Para simplificar la escritura y mejorar los cálculos con estas cantidades se hace uso de los exponentes, en particular de la llamada notación científica. Un número real x se dice escrito en *notación científica* si tiene la siguiente forma:

$$x = a \times 10^n$$

donde $1 \leq a < 10$ y n un entero.

Ejemplo. Uso notación científica.

a) $1{,}5 \times 10^{-5} = 0{,}000015$

b) $2{,}25 \times 10^5 = 225000$

c) Un año luz es aproximadamente 9,408,000,000,000 kilómetros. Es decir,

$$9{,}408{,}000{,}000{,}000 =$$
$$(9{,}408) \times (1{,}000{,}000{,}000{,}000) = 9{,}408 \times 10^{12}$$

d) El peso de un átomo de Plutonio es 0,0000000000000000000039 gramos. Luego,

$$0{,}0000000000000000000039$$
$$= \frac{3{,}9}{1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000} = 3{,}9 \times 10^{-21}$$

Puedes observar lo que ocurre con el punto decimal, que se corre hacia la izquierda o derecha según sea el signo del exponente.

Ejercicio 57. Con base en lo expuesto anteriormente, resuelve:

a) Escriba los siguientes números en notación científica:

i. 1045000=

ii. 0,00000000000010=

iii. 0,0000023=

iv. 834570=

v. 32450000000000=

vi. 23,51=

b) Escriba los siguientes números en forma decimal:

i. $1,23 \times 10^3 =$

ii. $1,234 \times 10^5 =$

iii. $3,12 \times 10^{-3} =$

iv. $7,5673 \times 10^{-5} =$

v. $9,86 \times 10^6 =$

vi. $9,9 \times 10^4 =$

CAPÍTULO 5. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

CAPÍTULO 5.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

5.1 Variables y Constantes

Las variables en matemática son símbolos, generalmente letras que representan un número real arbitrario, en un conjunto definido. La palabra variable, hace referencia *a la manera como ésta puede tomar distintos valores dentro de un conjunto numérico o universo*.

Ejemplo. La expresión $C = 2\pi r$ relaciona el perímetro C de una circunferencia con su radio r. Las variables dentro de una expresión no siempre pueden tomar cualquier valor.

El conjunto de valores que puede tomar la variable se conoce como dominio de la variable.

Ejemplo. La expresión $I = px$ relaciona el ingreso de ventas de x cantidad de artículos a un precio de venta p. Si el precio de venta de un artículo es de $\$550$, entonces el ingreso I de vender x cantidad de artículos está dado por $I = 550x$.

Ejemplo. En la expresión $\frac{x}{y}$, conformada por las variables x, y, el dominio de la expresión son todos los números reales excepto cuando $x \neq 0$ y $y = 0$ o cuando $x = y = 0$, pues haría que tal fracción no esté bien definida. También, en la expresión $\frac{x}{x-2}$ se tiene que $x \neq 2$, de lo contrario se indeterminaría la fracción.

Ejercicio 58. Según lo anterior, ¿Cuál es el dominio de las siguientes expresiones?

a) $\frac{2x}{(x+3)(x-2)}$. b) $\frac{x}{x^2-4}$. c) $\frac{2}{x}$

De la primera sección, recordamos la propiedad clausurativa. Esta indica que la suma o producto de números reales corresponde a un número real. Es así como, si los símbolos de variables representan números reales arbitrarios, entonces la combinación de ellos a través de las operaciones básicas constituye de nuevo un número real formando lo que llamaremos expresión algebraica.

5.2 Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas son expresiones matemáticas que representan números reales y son una combinación de letras y números mediante las operaciones. Por ejemplo:

a) $-3xy - x^2$ c) $(a^2 + b^2 - 1)^2$

b) $\frac{\sqrt[3]{xy^2z}}{1+x^2}$ b) $10 - 2\sqrt{xyz} + \frac{7}{5+x^2}$

Las expresiones algebraicas, al estar combinadas con las operaciones básicas, involucran términos y factores. Los términos se conformarán por coeficientes y parte variable; mientras que los factores, hace referencia a los elementos que conforman un producto, ya sea entre variables o números o entre ambos.

5.2.1 Términos

Un $término$ es una expresión formada por productos o cocientes. Los elementos de todo término son: el coeficiente, la parte variable y el grado. Los términos en una expresión algebraica se identifican por estar separados por signos de suma o resta.

Ejemplo. Son ejemplos de términos los siguientes:

a) $-3x^2y,$ es un término con coeficiente -3, variables x, y, grado 3, pues la suma de los exponentes de la parte variable es 3.

b) -13 es un término de grado cero pues no hay variable y coeficiente -13.

c) $-x$ es un término con coeficiente -1 y variable x, pues $-x = (-1) \cdot x$.

d) $\frac{3x^2y^2z^2}{x+3}$ es un término. El numerador contiene un **término** con coeficiente 3, variables x, y, z y es de grado 6.

Ejercicio 59. Con base en lo anterior, resuelve:

a) De la siguiente expresión algebraica, escribe cuántos términos tiene, indica el coeficiente de cada término y la parte variable de cada término:

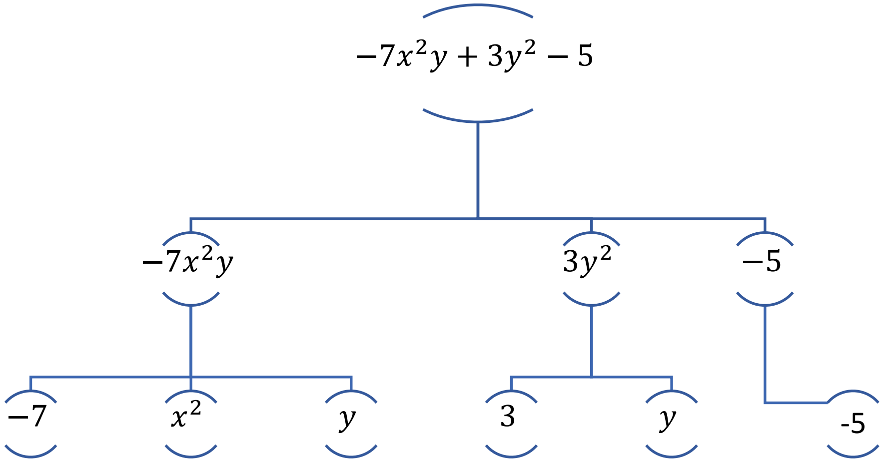
$$-2x + 5y - 3x^2y^2 + 7 - 3x^2yz^3$$

b) Piensa y nombre una variable. Escribe términos en esta variable que sean de grados $0, 1, 2, 3, 4\ y\ 5$. Luego de escribir estos términos, escribe la suma o resta de ellos. Responde: ¿Estos términos son semejantes? ¿Cuál es el grado de esta expresión algebraica obtenida? Esta expresión es llamada polinomio.

5.2.2 Factores

Los $factores$ son los elementos de una multiplicación. Es decir, son los que conforman un término. Por ejemplo, $2ab$ es un término con tres factores y $-23x^2yz$ es un término con 4 factores. Recuerda que escribir $2ab$ es lo mismo que $2 \cdot a \cdot b$. No creas que por que no hay signo de producto, entonces $2ab$ sólo tiene dos factores.

Ejemplo. Estructura de una expresión algebraica. En el diagrama se observa la división en termino (Primer nivel) y luego en factores (segundo nivel).



Ejercicio 60. Con respecto a los factores responden:

a) Escribe un término con 2 factores:

b) ¿Cuántos factores tiene $3xyzw$?

c) ¿Cuántos factores tiene la expresión casa?

5.2.3 Términos semejantes

Dos o más términos son *semejantes* si tienen la misma parte variable.

Ejemplo. Son ejemplos de términos y términos semejantes los siguientes:

a) $\frac{2}{5}xyz^3w$ es un término con coeficiente $\frac{2}{5}$, variables x, y, z, w y de grado 6. Además, este término es semejante a $-3wxyz^3$.

   Observe que para que sean semejantes no deben tener el mismo orden las variables, pues el producto es conmutativo.

b) El término xy^2 es semejante a los términos $-3xyy$ o $5xy^2$. Pero estos tres términos no son semejantes a $-10x^2y$. ¿Por qué?

Ejercicio 61. Responde y en caso de que sea necesario, justifica:

a) ¿Son $3xyz$ y $-2yzx$ términos semejantes?

b) ¿Consideras que todas las frutas que conoces son semejantes?

Clasificación de expresiones algebraicas. Dependiendo del número de términos que aparecen, se pueden clasificar como:

- ✓ Monomios: Expresiones con un sólo término. Por ejemplo, $-3x^2y$.
- ✓ Binomios: Expresiones con dos términos. Por ejemplo,$3x + 2yz$.
- ✓ Trinomios: Expresiones con tres términos. Por ejemplo,$2x^2 - 3xy + 4y^2$.
- ✓ Polinomio de n términos: $23x^5 - 3x^4y^2 + 5xy - x - y + 1$. Polinomio de 6 términos.

Ejercicio 62. Con las variables que quieres, escribe un:

a) (Monomio):

b) (Binomio):

c) (Trinomio):

d) (Polinomio):

5.2.4 Valor de una expresión algebraica

Las expresiones algebraicas dependen de variables y las variables se pueden reemplazar por un número real, siempre que esté en el domino de la variable. Esto permite transformarlas en números cuando hay una sustitución de cada una de sus variables por números reales.

Ejemplo. En la expresión algebraica $x + y$ se puede hacer la siguiente sustitución: $x = 2, y = -4$. Entonces $x + y$ queda como $2 + (-4) = -2$. Esto significa que la expresión $x + y$ con la sustitución elegida toma el valor de -2.

Ejemplo. Un rectángulo tiene por base x y altura y. Hallar el perímetro del rectángulo conociendo que $x = 3$ cm y $y = 4$ cm. Sabemos que el perímetro del rectángulo corresponde a la suma de todos sus lados. Por lo que el perímetro es $P = 2x + 2y$. Si sustituimos los valores de x, y dados en el problema, queda $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$ cm.

Ejemplo. A continuación se determina el valor que toma el polinomio $2x^3 + x^2 + 6x$ cuando $x = -\frac{1}{2}$. Para ello, se reemplaza el valor de $x = -\frac{1}{2}$ en todas las x de la expresión y se procede a resolver el polinomio aritmético:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + 6\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{-2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{6}{2}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 3$$

$$-3$$

Ejercicio 63. Determina el valor de las expresiones algebraicas con los valores indicados.

a) El valor de $x^2 - 2xy + z$, si $x = -3$, $y = -2$ y $z = -1$.

b) El valor de $2x + \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando $x = 3$ y $y = 0$.

c) Si $x = 1$ y $y = 2$, ¿Cuál es el valor que toma la expresión algebraica $3x$?

d) El valor de $\frac{3x^2}{y} - \sqrt{x} + xyz$ si $x = -1$, $y = 2$ y $z = 0$.

e) El valor de $x^3 - 2x + 1$ cuando $x = -1$ o cuando $x = 1$.

f) El valor de $\frac{-2x^2+3x-5}{x+y}$ cuando $x = -2$, $y = 1$.

g) En un triángulo rectángulo, h, a, b son la hipotenusa y los catetos respectivamente. El teorema de Pitágoras enuncia que la suma de los cuadrados de los catetos corresponde al cuadrado de la hipotenusa, es decir, $h^2 = a^2 + b^2$. Determine la medida de h si $a = 3$cm y $b = 4$cm.

5.3 Operaciones

Entre expresiones algebraicas podamos realizar operaciones como suma, resta, multiplicación o división. Para ello, debemos tener en cuenta las operaciones vistas entre números reales, las propiedades de potencias, las propiedades de operaciones entre números reales y considerar las siguientes reglas:

- ✓ Dar prioridad a las operaciones entre signos de agrupación.
- ✓ Luego, las potencias, radicales y logaritmos,
- ✓ Seguidas de la multiplicación y división,
- ✓ Finalmente, la suma y resta,
- ✓ Si se debe decidir entre operaciones del mismo nivel realizar estas de derecha a izquierda.

SUMA Es clave tener en cuenta los términos semejantes. De la suma de dos o más términos semejantes, resulta otro término semejante a los sumandos.

Ejemplo. Algunos ejemplos de suma:

a) $2xyz^2 + 5xyz^2 = 7xyz^2$.

b) $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5) = 11x - 2y - 3$

c) $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6) = 6t^2 - 2s^2 + 6$

Ejercicio 64. Resuelve:

a) $(8a^4 + 7a^2b^2 + 6b^4) + (7a^4 - a^3b + a^2b^2 - 8ab^3) =$

b) $(8x^2 - 5y^2) + (3x^2 - 6y^2 + 1) =$

c) $(5x^3 + 6x^2 - 3) + (6x^4 + 8x) =$

RESTA Es clave tener en cuenta que el signo menos afecta el signo de cada término al interior de un signo de agrupación.

Ejemplo. Algunas restas entre expresiones son:

a) $(3a + 7b - 9) - (5a + 9b + 21)$
$= 3a + 7b - 9 - 5a - 9b - 21$
$= -2a - 2b - 30$

b) $\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{x} + 3\sqrt{x}\right)$
$= \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3\sqrt{x}$
$= -\sqrt{x}.$

c) $2\big[2[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\big]$
$= \quad 2\big[2[3x^2 + 6 - 2x^2 + 10]\big]$
$= \quad 2\big[2[x^2 + 16]\big]$
$= \quad 2[2x^2 + 32]$
$= \quad 4x^2 + 64$

Ejercicio 65. Resuelve:

a) $(3x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1) - (6x^5 - 2x^3 + x^2 - 1) =$

b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1) - (x^3 - 2x^2 + x - 5) =$

c) $(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) =$

PRODUCTO Se requiere tener claridad de la propiedad distributiva.

Ejemplo. Veamos algunos ejemplos de productos entre:

a) Monomios:

$$\begin{aligned}(2x)(-3x^3y) &= -(2 \cdot 3)(xx^3y)\\ &= -6x^4y\end{aligned}$$

b) Monomios y binomios:

$$\begin{aligned}(-3x^2)(x^2y - xz) &= (-3x^2)(x^2y) - (-3x^2)(xz)\\ &= -3x^4y + 3x^3z\end{aligned}$$

c) Binomios:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3x) &= (\sqrt{x})^2 - 3x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 9x\\ &= x - 3x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 9x\\ &= -3x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 8x\end{aligned}$$

d) Binomio y trinomio:

$$\begin{aligned}(3y - 2)(4y^3 + 2y^2 - 3y) &= 12y^4 + 6y^3 - 9y^2 - 8y^3 - 4y^2 + 6y\\ &= 12y^4 - 2y^3 - 13y^2 + 6y\end{aligned}$$

e) Binomio al cuadrado:

$$(3y - 2)^2 = (3y - 2)(3y - 2) = 9y^2 - 12y + 4$$

f) Monomio y Binomios:

$$\begin{aligned} 5x(x+2)(x-3) &= -5x(x^2-3x+2x-6) \\ &= -5x(x^2-x-6) \\ &= -5x^3+5x^2+30x \end{aligned}$$

Ejemplo. Simplificar la expresión $(w^2-w-1)(w^4-w^2)-(w^5+1)(w-1)$.

$$\begin{aligned} &(w^2-w-1)(w^4-w^2)-(w^5+1)(w-1) \\ &= (w^6-w^4-w^5+w^3-w^4+w^2)-(w^6-w^5+w-1) \\ &= w^6-w^4-w^5+w^3-w^4+w^2-w^6+w^5-w+1 \\ &= -2w^4+w^3+w^2-w+1 \end{aligned}$$

https://youtu.be/9ikRyzZYR7k

Video 9

Ejemplo. Simplifica la siguiente expresión algebraica.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^2y^{-3}}{3x^{-3}(y^{-2})^2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{x^{-3}y^2}{xy^{-5}}\right)^2 &= \left(\frac{3x^{-3}(y^{-2})^2}{2x^2y^{-3}}\right)^3\cdot\left(\frac{y^5y^2}{xx^3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3y^3}{2x^3x^2y^4}\right)^3\cdot\left(\frac{y^7}{x^4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3^3y^9}{2^3x^{15}y^{12}}\right)\cdot\left(\frac{y^{14}}{x^8}\right) \\ &= \left(\frac{3^3}{2^3x^{15}y^3}\right)\cdot\left(\frac{y^{14}}{x^8}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3^3y^{14}}{2^3x^{15}x^8y^3}\right)$$

$$= \frac{3^3y^{11}}{2^3x^{23}}$$

$$= \frac{27y^{11}}{8x^{23}}$$

https://youtu.be/S1ZkyldPnm8

Video 10

Ejercicio 66. Resuelve los siguientes ejercicios. Simplifica hasta donde sea posible.

a) $x^3x^{-2}x^7 =$

b) $(2x^5)\cdot(2^3x^2y^3) =$

c) $((x^2)^2)^2$

d) $(xy)^3 =$

e) $(2x^2y^3)^5$

f) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 =$

g) $\left(\frac{2xy^2}{3z}\right)^4 =$

h) $(-2x^4)^{-3} =$

i) $3a^{-5} =$

j) $(3a)^{-5} =$

k) $(x^{-2})^5 =$

l) $\frac{3x^{-4}}{5y} =$

m) $(3^2x^4y)^{-2} =$

n) $\frac{2x^{10}}{(x^2)^3} =$

o) $\frac{x^4}{x^8} =$

p) $\left(\frac{2xy}{3}\right)^{-3}$

q) $4(2x + 8y) - 5(-3x - 5y) + 2 =$

r) $-2(x^2 + 2x - 3) - 4(x - 3) + 4x(x - 5) =$

s) $5 - [3x + 5x(x^2 - 3x + 2) - 1] =$

t) $-x\big[2(x - 1) + 3x(x - 2) + 4[2x - 3x(x + 1)]\big] =$

u) $-2\left(-3x^2\left(\frac{5}{2}x + 2\right) - 3\left(x^2 - 2x^2\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\right)\right) =$

v) $(2a - 3b + 1)(2a^2 + 5b - 2ab + 1) =$

w) $3(x^7 - 2x^5 + 3x^2 - 1) + 5(x^6 - 4x^4 + 3x) =$

x) $-2(3x^3 - x + 1) - \frac{3}{2}(2x^3 + 5x^2 + 7x + 1) =$

y) $-3(a^2b - 2b + 3a) - 3(a^2 + b)(a^2 - b) + 4ab =$

z) $-2x\{2x - 3x(x^2 - 2x + 1) + 3x(x^2 + 5x + 3)\} =$

Ejercicio 67. Seleccione la opción correcta.

a) Al simplificar $\frac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\frac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$ queda:

i. x^8 ii. $\frac{1}{x^8}$ iii. x^3 iv. $\frac{1}{x^4}$

b) El resultado de simplificar la expresión $\frac{40x^3y^2}{25x^2y^2} \times \frac{27xy}{8x^2y^2}$ es:

i. $\frac{27}{5y}$ ii. $\frac{5y^8}{27x^4}$ iii. $\frac{27x^8}{5y^2}$ iv. $\frac{27y^2}{5}$

Ejercicio 68. (Representación).

a) Con una lámina cuadrada de lado l centímetros se desea construir una caja de base cuadrada cortando en sus esquinas cuadrados de longitud x centímetros. Realiza un dibujo de la situación y escribe expresiones para hallar el área superficial y volumen de la caja que se construirá sin tapa.

b) Con una lámina rectangular de largo l y ancho a $[centímetros]$, se desea construir una caja sin tapa cortando en sus esquinas cuadrados de longitud x centímetros. Realiza un dibujo de la situación y escribe expresiones para hallar el área superficial y volumen de la caja que se construirá sin tapa. ¿Cuál es la diferencia de las expresiones obtenidas en el ítem anterior con las obtenidas en este ejercicio?

c) Una persona debe transportarse en el sistema de transporte masivo de la ciudad, para lo cual debe pagar un valor por pasaje de $\$1800$ pesos. Esta persona vive en zona de ladera y debe pagar dos pasajes adicionales de su sitio de vivienda a la estación para salir y entrar de su casa. Si cada pasaje le cuesta $\$2500$ pesos, escriba una expresión para determinar el costo que debe asumir la empresa por viáticos por día después del empleado realizar n cantidad de viajes.

CAPÍTULO 6. ECUACIONES

CAPÍTULO 6.

ECUACIONES

Una ecuación se forma a partir de la igualdad entre dos expresiones algebraicas. Las ecuaciones son importantes en el modelado de situaciones en diversas disciplinas de las ciencias e ingeniería.

Ejemplo. Algunos casos interesantes.

a) La velocidad del flujo sanguíneo se define como la tasa de desplazamiento de sangre por unidad de tiempo. La relación entre el flujo sanguíneo v (velocidad lineal [cm/s]), el flujo Q (flujo de volumen por unidad de tiempo [ml/s]) y el área de la sección transversal (área de la sección transversal de un vaso sanguíneo $[cm^2]$, está dada por $v = \frac{Q}{A}$. Si observas, este problema en el área de la salud requiere la comprensión y manejo de ecuaciones. En particular, si un hombre tiene un gasto cardíaco de $3.2\frac{L}{min}$ el diámetro de la aorta es $18mm$ y el área total de la superficie de sus capilares sistémicos de $2400cm^2$, nos interesa hallar la velocidad de flujo sanguíneo en la aorta respecto la velocidad de flujo sanguíneo en los capilares.

b) Suponga también que usted debe movilizarse en transporte, cuyo pasaje cuesta $\$2300$. Usted es un asesor que desea conocer al final de su jornada cuál fué el gasto total en pasajes para incluirlos en viáticos de la empresa. Sabiendo que viaja n veces, donde n es un entero positivo, podemos establecer la ecuación de gasto total como $g = 2300n$. Si usted viaja 2 veces entonces el gasto es de $\$4600$. Si por el contrario la empresa le indica que para cierto día tiene disponible $\$35000$ disponibles para transporte, usted puede organizar su itinerario, el cual le garantiza que puede pagar hasta 15 viajes.

Las situaciones anteriores requieren una mejor comprensión de los datos y su solución requiere completamente del análisis de datos, sustitución de valores en la ecuación, solución, etc. En este sentido es importante abordar el concepto de ecuación y la forma como puedes resolverla.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, a las que llamaremos términos de la ecuación; por ejemplo, en la ecuación $2x + 5 = 3x - 2y + 1$, el término izquierdo es $2x + 5$ y el término derecho es $3x - 2y + 1$, y es una ecuación en las variables x, y.

Ejemplo. Algunas ecuaciones en una, dos, tres o cuatro variables son:

a) $3x^2 - 2x = 8$

b) $xyz = x^2 + y^3 + z$

c) $2x = 5$

d) $\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{x-y}$

e) $\frac{2x+3y}{z+w} = 4x + y^5$

f) $x = 5$

Aunque en los términos de una ecuación puede aparecer más de una variable, nos concentramos en ecuaciones con una sola variable. Un valor real satisface una ecuación, si cuando al sustituirse por todas las variables de la ecuación hace que los dos términos coincidan.

Ejemplo. El valor $x = 2$ satisface la ecuación $x + 1 = x^2 - 1$, pues al sustituir en el término izquierdo y derecho el valor $x = 2$ en cada aparición de la variable x, genera un resultado 3 en cada miembro de la igualdad.

Ejercicio 69. Resuelve:

a) Decide si es verdadero o falso: El valor $x = 5$ satisface la ecuación $x^2 - 5x = -25$.

b) ¿Qué valores satisfacen o son solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$?

c) ¿Es $x = 1$ solución de la ecuación $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{5x}{x-2} = \frac{1}{4}$?

d) Verifica que el conjunto solución de la ecuación $3x^2 - 2x = 8$ es $\left\{2, \frac{4}{3}\right\}$.

e) ¿Es $x = 3$, $y = -52$ solución de la ecuación $\sqrt{x+1} + 5 = \sqrt{-x-y}$?

f) La ecuación de utilidad U*[en millones]* de producción y venta de x cantidad de artículos, viene dada por $U = 300x - 2000$. El productor le plantea a la junta de socios que es posible bajo este modelo, tener una utilidad de $\$12000$ *[en millones]* al producir y vender 48 unidades. ¿Podría afirmar que el productor está en lo cierto? Justifica.

Por el momento solo nos interesa solucionar dos tipos de ecuaciones de una variable. Estas son lineales (donde el grado de los términos que participan es a lo más 1) y donde el número máximo de soluciones será una; y cuadráticas; (donde el grado de los términos que participan es a lo más 2) y tendrá máximo dos soluciones.

Ejemplo. Una ecuación lineal y una cuadrática:

a) $x + 4 = 7(x - 8)$ b) $x + 1 = 2x^2 - x + 5$

Es importante resaltar que, aunque en la cotidianidad no se emplean de forma estricta, las propiedades uniformes de la igualdad son las que de forma implícita fundamentan el uso de las reglas que comúnmente han denominado reglas de transposición.

PROPIEDADES UNIFORMES

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- ✓ Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.
- ✓ Si $a = b$ entonces $ac = bc$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Estas dos propiedades establecen que la igualdad se preserva, independientemente el número real que sume o multiplique en ambos miembros de la igualdad.

Ejemplo. uso de la propiedad uniforme de la suma y producto, para resolver la ecuación $2x + 1 = 8$.

El objetivo consiste en despejar la variable x. Iniciamos sumando en ambos miembros de la ecuación el opuesto aditivo de 1. Entonces la ecuación $2x + 1 = 8$ se transforma en $2x + 1 + (-1) = 8 + (-1)$. Por la propiedad de inverso aditivo tenemos $2x + 0 = 7$. La propiedad de neutro aditivo nos permite obtener $2x = 7$. Ahora, tenemos el factor 2, despejar completamente la variable, multiplicamos en ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 2, entonces queda $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 7$. Por propiedad asociativa y del inverso multiplicativo queda $1 \cdot x = \frac{7}{2}$. Ahora, $x = \frac{7}{2}$ es una ecuación equivalente a la ecuación $2x + 1 = 8$ que nos brinda el valor de x que corresponde a la solución de la ecuación.

En la práctica, las propiedades uniformes no se emplean directamente, por el contrario, el ejercicio de resolver una ecuación se vuelve más práctico al usar las reglas de transposición, sustentadas estas por las propiedades uniformes de la suma y la multiplicación. Estas reglas reducen el número de pasos en la solución de una ecuación y nos ayudan a transformar la ecuación original en una más sencilla.

Observación 13 Las reglas de transposición, sustentadas por las leyes uniformes de la suma y producto, establecen que:

- ✓ **T1** Todo término que suma en un lado de la igualdad, se pasa a restar al otro lado de la igualdad, y todo término que resta a un lado de la igualdad se pasa a sumar al otro lado de la igualdad.

  Por ejemplo, en la ecuación $x + 2 = 3$, se pasa a restar el 2 (pues está sumando en el término izquierdo) y queda $x = 3 - 2$. Entonces $x = 1$. Observe que el paso de pasar a restar el 2, corresponde al uso de la propiedad uniforme de la igualdad. Esto es, pues si $x + 2 = 3$ entonces se suma en ambos miembros de la ecuación el valor de -2, entonces queda $x + 2 + (-2) = 3 + (-2)$ que al reducir y reescribir queda $x = 3 - 2$.

  Por otro lado, si tenemos la ecuación $y - 2 = 3$, entonces se pasa a sumar el 2 (pues está restando) para obtener $y = 3 + 2$, es decir, $y = 5$ es la solución de la ecuación.

- ✓ **T2** Todo factor que multiplica a un lado de la igualdad y no es cero, pasa a dividir al otro lado de la igualdad; y todo factor que está dividiendo a un lado de la igualdad, pasa a multiplicar a todo lo que está al otro lado de la igualdad.

  Por ejemplo, si tenemos la ecuación $2x + 4 = 1$, tenemos $2x = 1 - 4$ o $2x = -3$ por T1. Como observas, el número 2 está multiplicando la variable x y para despejarla, debemos pasar a dividir el 2, quedando $x = \frac{-3}{2}$. Esto equivale a multiplicar en ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{2}$.

Por otro lado, si se tiene la ecuación $\frac{x+1}{5} = 8$, el 5 está dividiendo TODO el término izquierdo, entonces se pasa a multiplicar todo el término derecho, quedando
$x + 1 = 40$. Al usar T1 queda $x = 39$.

Además de tener en cuenta las reglas establecidas anteriormente, se debe tener en cuenta la jerarquía de las operaciones, pues esta es necesaria para despejar la variable en una ecuación.

Observación 14 Toda ecuación lineal se resuelve usando $(T1)$ o $(T2)$

Ejemplo. Usos de las reglas de transposición.

$$
\begin{array}{rcll}
-5x - 3 & = & \dfrac{-5 + 4x}{3} & (T2) \text{ 3 esta dividiendo pasa a multiplicar} \\
3(-5x - 3) & = & -5 + 4x & \text{Recuerde usar ley distributiva} \\
-15x - 9 & = & -5 + 4x & (T1) \text{ 9 esta restando pasa a sumar} \\
-15x & = & -5 + 4x + 9 & \text{Sumando términos independientes} \\
-15x & = & 4 + 4x & (T1) \text{ 4x esta sumando pasa a restar} \\
-15x - 4x & = & 4 & \text{Sumando términos semejantes} \\
-19x & = & 4 & (T2) \text{ -19 esta multiplicado pasa a dividir} \\
x & = & \dfrac{4}{-19} & \text{Finalmente por la ley de los signos} \\
x & = & -\dfrac{4}{19} &
\end{array}
$$

Ejercicio 70. Resuelve las siguientes ecuaciones.

https://youtu.be/wV4CUCRh0qA
Video 121

a) $5(y+1)-4=-4(y+12)-3$

b) $-2[3x-5(2x+3)]=2-x$

c) $\frac{3}{5}x+\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}a+\frac{3}{7}=\frac{1}{2}-\frac{5}{7}a$

e) $(x+4)-2x+1=(x+1)^2-2$

f) $3+\frac{2}{t}=5-\frac{1}{t}$

g) $\frac{3}{x}=0$

h) $\frac{x-1}{1-x}=0$

i) $\frac{\mathrm{x}}{2}=0$

j) $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+3}=0$

k) $2[-(\mathrm{x}-1)+4]=5+[-(6\mathrm{x}-7)+9\mathrm{x}]$

l) $-[2\mathrm{x}-(5\mathrm{x}+2)]=2-(2\mathrm{x}+6)$

m) $-2x-3(5-3x)=2(x+4)+5$

n) $(3x-4)-(5x-8)=-(x+12)-6x$

6.2 Algunos problemas de aplicación

Emplearás las técnicas presentadas anteriormente para resolver las ecuaciones propuestas en los siguientes problemas o que son el resultado de el modelado de la situación. Para esto, debes leer y analizar los datos para determinar la información que te brinda el modelo (ecuación) que se propone con cada problema.

Ejercicio 71. Sobre ecuaciones lineales:

a) La relación entre la temperatura medida en grados Celsius (T_C) y en grados Fahrenheit (T_F) está dada por

$$T_C = \frac{5}{9}\,(T_F - 32).$$

i. Si la temperatura dada es grados Celsius y desea hallar en grados Fahrenheit, ¿cómo emplea esta expresión para realizar tal cálculo?

ii. ¿A qué equivale en T_F lo correspondiente $a\ -5°C$?

iii. ¿A qué equivale 40F en Celsius?

b) La velocidad en metros por segundo de un móvil que va en un camino recto está dada por la expresión $v = 4t - 20$. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido cuando la velocidad es de $\frac{2m}{s}$ y también cuando la velocidad es de $\frac{0m}{s}$?

c) Un agente de ventas quiere calcular el costo de un producto con impuesto de venta de 2.50%. Escriba una ecuación que permita al agente hallar el costo total c del producto que cuesta x pesos.

d) El ingreso mensual por el cuidado de n niños en una guardería vienen dado por la expresión $i = 370n$ *[en miles de pesos]* y los costos mensuales por $c = 340n + 7500$. Halle la cantidad de niños que deben inscribirse para llegar al punto de equilibrio, es decir, para que los ingresos sean igual a los costos.

e) Una compañía de telefonía celular cobra un cargo básico de $\$54000$ que incluye 240 minutos y 20 mensajes de texto. Además, cobra $\$150$ pesos por cada minuto adicional. La cuenta de Lili para el mes de junio es de $\$120000$. ¿Cuántos minutos adicionales consumió?

f) En un rectángulo de base b y altura a, el perímetro viene dado por $P = 2a + 2b$. Resuelva la ecuación para b. Halle este valor si $P = 28$ y $a = 4$.

g) La ecuación $C = 25x + 70$ da el costo de producción *[en millones de pesos]* de x cantidad de unidades. Halle el número de unidades que se pueden producir sabiendo que el costo ascendió a 220 *[en millones de pesos]*.

h) El ingreso de ventas por cierto producto viene dado por $I = 250q$, donde q es el número de unidades vendidas. Halle el ingreso por vender 350 unidades. Halle el número de unidades que deben venderse para obtener ingresos de 1250.

i) Un proyecto de costura requiere de tres piezas de tela. La pieza más larga debe tener el doble de la longitud de la pieza mediana y la pieza más corta debe ser 10 metros más corta que la pieza mediana. Las tres piezas se cortarán de un trozo lineal de tela de 70 metros de largo. Halle la longitud de cada pieza.

j) Se invierte 2500 millones de pesos al 2% anual de interés simple. Determine la ganancia por interés en un año. Escriba una expresión que permita resolver este problema.

CAPÍTULO 7. ECUACIONES CUADRÁTICAS

CAPÍTULO 7.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones cuadráticas corresponden a ecuaciones polinómicas de grado dos. Estas ecuaciones tendrán máximo dos soluciones y se podrá resolver dicha ecuación cuadrática de dos formas; ya sea por factorización o empleando la conocida fórmula cuadrática. Al igual que las lineales, tienen diversas aplicaciones que veremos al final de este capítulo.

7.2 Forma y solución

Una ecuación cuadrática tendrá máximo dos soluciones, es decir, que las posibilidades es que no tenga solución, tenga única solución o tenga dos soluciones distintas. Una ecuación cuadrática es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ y su solución se puede dar a través de dos formas:

Solución por factorización. Es necesario saber factorizar trinomios y utilizar la siguiente propiedad:

Ley del factor nulo: $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

La regla indica que, si el producto de dos o más factores es cero, es porque uno de los factores es cero. Lo que nos lleva a convertir una ecuación cuadrática en dos ecuaciones lineales, pues se iguala cada factor a cero.

Ejemplo. Encontrar el conjunto solución de $(x+2)(x-3)=0$. En este caso, el trinomio ya se encuentra factorizado, es decir, que lo único que hacemos es igualar a cero cada factor. Es decir, $x+2=0$ o $x-3=0$. Por lo que este par de ecuaciones son lineales y dan como solución $x=-2$ o $x=3$. Es así, que este par de valores constituyen el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

Ejemplo. Encontrar la solución de la ecuación $x^2-5x=24$. En este caso, debemos primero igualar a cero teniendo en cuenta la forma de la ecuación cuadrática. Es así como la ecuación inicial es equivalente a $x^2-5x-24=0$. El término izquierdo se descompone y la ecuación anterior es equivalente a $(x-8)(x+3)=0$. Entonces al igualar cada factor a cero, queda $x-8=0$ o $x+3=0$. La solución de la ecuación es $x=8$ o $x=-3$.

Ejemplo. Resolver $x(x+1)=12$. Se elimina los paréntesis, se iguala a cero y la ecuación equivalente es $x^2+x-12=0$. Al descomponer el trinomio, la ecuación se transforma en $(x+4)(x-3)=0$. Se igualan a cero los factores para obtener el conjunto solución conformado por $x=-4$ o $x=3$.

Los últimos dos ejemplos corresponden a ecuaciones donde el trinomio se factoriza. Se deja al lector estudiar los casos de factorización para resolver este tipo de ecuaciones, teniendo en cuenta que este no será el propósito en este curso, pues el interés es resolver ecuaciones empleando la fórmula cuadrática, como lo haremos con el próximo método de solución.

Ejercicio 72. (Opcional) Resuelve las ecuaciones usando la factorización.

a) $x^2-2x+1=0$

b) $x^2-3x=-2$

c) $(3x-4)(x+1)=-2$

d) $x^2-1=0$

e) $25\mathrm{y}^2=9$

f) $2x^2=18$

Solución por fórmula cuadrática. En caso de que no sea posible factorizar, se puede emplear la fórmula cuadrática. Es importante, identificar los coeficientes a, b, c que son sustituidos en la fórmula para hallar el conjunto solución de la ecuación. La solución de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

viene dada por la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Observe que la solución de la ecuación cuadrática por fórmula cuadrática depende del signo del término al interior de la raíz. Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene única solución; si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones y; si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación cuadrática no tiene solución.

Observación 15 Recuerda los casos en el cálculo de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{9} = 3$ pues $3^2 = 9$.
b) $\sqrt{25} = 5$ pues $5^2 = 25$.
c) $\sqrt{-100}$ no existe pues no hay número que elevado al cuadrado sea negativo.
d) $\sqrt{5}$ queda expresada pues es una raíz inexacta.

Ejemplo. Para solucionar la ecuación $3x^2 - 5x + 2 = 0$, tenemos que:

a) Identificar los valores de a, b y c. Aquí, $a = 3, b = -5$ y $c = 2$.

b) Reemplazar los valores identificados en la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

c) El signo $\pm$ nos indica que las dos soluciones son

$$x = \frac{5+1}{6} \quad o \quad x = \frac{5-1}{6}$$

d) Después de simplificar queda $x = 1\ o\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

https://youtu.be/pCd0MD5izKU
Video 13

Ejercicio 73. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 4x + 2 = 0$

b) $3(x+1)(x-2) = x(x+2)$

c) $4x^2 + 16x = 9$

d) $3x^2 + 6x - 5 = 0$

e) $1 + 2x = -x^2$

f) $(x+3)(x-2) = 2$

g) $\mathrm{a}^2 = 3(\mathrm{a} - 1)$

h) $\frac{x(x-3)}{5} = -2$

Ejercicio 74. De la solución de $-5x - 2x^2 = x^2 - 2x + 18$ se puede decir que:

a) $x = 3 \;\; o \;\; x = -2$
b) $x = -3 \;\; o \;\; x = 2$
c) $x = 3$
d) *No hay solución*.

Observación 16 Destacamos que, para resolver una ecuación, se debe:

a) Eliminar paréntesis y reunir términos semejantes.

b) En una ecuación lineal, pasar los términos que contienen variables a un lado y los números al otro lado.

c) En una ecuación cuadrática, se debe igualar a cero y luego:

- Tratar de factorizar para igualar cada factor a cero; o

- Emplear la ecuación cuadrática para resolverla.

7.3 Problemas de aplicación

Emplearás las técnicas presentadas para resolver los problemas que a continuación se proponen. Además, debes leer y analizar los datos para determinar la información que te brinda el modelo (ecuación) que se propone con cada problema.

Ejercicio 75. Halla la solución al problema propuesto.

a) El área de un rectángulo es de $180\ cm^2$. El largo es 8 cm mayor que el ancho. Halle las dimensiones del rectángulo.

b) La base de un triángulo es 2 centímetros mayor que la altura. Si el área del triángulo es de 54 centímetros cuadrados, determine las dimensiones de la base y la altura. *[Área del triángulo: La mitad del producto de la base por la altura]*.

c) La suma de dos números es 24 y la suma de sus cuadrados es 320. Halle los números.

d) El producto de dos números enteros pares consecutivos y positivos es de 120. Calcula los números.

e) Divide 15 en dos partes tales que el cuadrado de una de ellas sea el cuádruple de la otra.

f) Rosa ha decidido cercar un terreno rectangular que tiene un área de $320\ m^2$. Se conoce que el largo es 2 metros mayor que el triple del ancho. Halle las dimensiones del huerto.

g) La diferencia entre el cuadrado de un número entero positivo y su duplo es 15. Halla el número.

h) Un comerciante determina que los ingresos dependen del precio del producto. Además, estima que el ingreso I *[en miles]* de vender x cantidad de artículos viene dado por $I = -2p^2 + 150p$. Con base en este modelo, responde:

   i. Determine si es posible que el comerciante obtenga ingresos si el artículo tiene un precio de venta de $\$80$.

   ii. Determine el precio de venta al que el comerciante no obtendrá ingresos.

   iii. Determine el precio aproximado de venta al que el comerciante tendrá un ingreso de $\$2000$.

i) Un médico debe administrar un medicamento experimental a un paciente. Este medicamento tiene como contraindicación que disminuye el porcentaje de oxígeno en la sangre en relación con los días que se suministre. La relación porcentaje de oxígeno en sangre (P) de acuerdo con los días que se suministra (t), viene dado por

$$P = t^2 - 12t + 100.$$

Ahora, un paciente con niveles de oxígeno en sangre por debajo de 90% (saturación de oxígeno baja), se considera que tienen hipoxemia; y un nivel de oxígeno en la sangre por debajo del 80%, se conoce como hipoxemia severa. Con base en esta información, responde:

Después de que día de iniciar la administración del medicamento el paciente presentaría hipoxemia.

i. 1 día ii. 2 días iii. 3 días iv. 4 días

Después de que día de iniciar la administración del medicamento el paciente presentaría una hipoxemia severa.

i. 2 días ii. 3 días iii. 4 días iv. 5 días

El medicamento es asimilado por el paciente y los niveles de oxígeno en sangre se normalizan [100%] después de:

i. 4 días ii. 6 días iii. 8 días iv. 10 días

CAPÍTULO 8. INECUACIONES

CAPÍTULO 8.

INECUACIONES

En la sesión de ecuaciones se estudió la relación de igualdad $=$ entre expresiones algebraicas. Ahora comparamos expresiones algebraicas empleando los símbolos de relación de orden representados con el símbolo $<$ o a través de la combinación con el símbolo igual, $\leq$. Además, veremos que la relación de orden hace parte del lenguaje cotidiano y emplearemos el lenguaje algebraico para hacer representación de situaciones o expresiones que hacen parte del diario vivir en cualquier contexto.

Observación 17 El conjunto de los números reales se puede ver como la unión de tres conjuntos, de la siguiente forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \mathbb{R}^{-} \cup \{0\}$$

En la unión anterior, tenemos:

- ✓ Conjunto de números reales positivos $\mathbb{R}^{+}$: Conjunto de números reales x que satisfacen $x > 0$. Este conjunto de números está estrictamente a la derecha del cero.

- ✓ Conjunto de números reales negativos $\mathbb{R}^{-}$: Conjunto de números reales x que satisfacen $x < 0$. Este conjunto de números está estrictamente a la izquierda del cero.

8.1 Relación de orden en $\mathbb{R}$

La relación de orden en los números reales permite determinar cuándo un número real es mayor que otro. Si x, y son números reales, decimos que x es mayor que y si y sólo si $x - y > 0$ y escribimos $x > y$, es decir, cuando su diferencia es positiva.

Ejemplo. Determinemos entre el par de números dados cuál es mayor:

a) $\frac{3}{7}$ y $\frac{1}{5}$. Hacemos la diferencia entre ellos en cualquier orden.$\frac{3}{7}-\frac{1}{5}=\frac{15-7}{35}=\frac{8}{35}>0$. Por lo tanto, $\frac{3}{7}>\frac{1}{5}$

b) $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{7}{3}$. Hacemos la diferencia entre ellos. $-\frac{5}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{-15+14}{6}=-\frac{1}{6}<0$. Como el resultado es negativo entonces $-\frac{7}{3}>-\frac{5}{2}$.

Ejercicio 76. Entre el par de números dados, determinar cuál es mayor.

a) $-\frac{5}{8}$ y $-\frac{9}{6}$

b) π y $\sqrt{10}$

Observación 18 Decir que 5 es menor que 10 equivale a decir que 10 es mayor que 5, en símbolos $5<10$ o $10>5$. Así, podemos escribir $a<b$ o $b>a$.

Ejemplo. Según la observación, en lo cotidiano te puedes referir de la siguiente forma: Juan gana más dinero que Lina o de forma equivalentemente Lina gana menos dinero que Juan.

8.1.1 Propiedades de orden en $\mathbb{R}$

Usa la recta numérica para representar las siguientes propiedades de la relación de orden en los números reales.

Tricotomía Si x representa un número real, entonces solo se tiene uno de los tres casos:

$$x=0 \text{ o } x>0 \text{ o } x<0.$$

Transitiva Si $x < y$, $y < z$ entonces $x < z$.

Ejemplo. Si $2 < 5$ y $5 < 10$ entonces $2 < 10$.

Ejercicio 77. Si $-2 < x \;\; y \;\; x < y$, ¿qué concluyes?

Uniforme Si $x < y$, $z < w$ entonces $x + z < y + w$.

Ejemplo. Si $-5 < 2$ y $1 < 8$ entonces $-5 + 1 < 2 + 8$. Es decir, $-4 < 10$.

Ejercicios 78. Si $2 < x$, $y < -3$ ¿qué concluyes?

Uniforme Si $x < y$ entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se cumple $x + c < y + c$. Puedes sumar en ambos miembros de la desigualdad una misma cantidad, esta se conserva.

Ejemplo. Si $-7 < -2$ entonces $-7 + (-8) < -2 + (-8)$. Es decir, $-15 < -10$.

Ejercicios 79. Usa la propiedad anterior con $-2 < x$ y $c = -3$.

Uniforme Si $x < y$ y $c \in \mathbb{R}^+$ entonces $xc < yc$. Puedes multiplicar en ambos lados de la desigualdad por una cantidad positiva, la desigualdad no cambia.

Ejemplo. Si $3 < 8$ y entonces $2 \cdot 3 < 2 \cdot 8$. Es decir, $6 < 16$.

Ejercicio 80. Usa la propiedad anterior para resolver.

a) Si $-2 < x \;\; y \;\; c = 3$, ¿cuál es el resultado de aplicar la propiedad?

b) Si $5x > 4$, ¿cuál es el resultado de despejar la variable?

Uniforme Si $x < y$ y $c \in \mathbb{R}^-$ entonces $xc > yc$.

Ejemplo. Si $-10 < -2$ entonces $(-3)(-10) > (-3)(-2)$. Es decir, $30 > 6$.

Ejercicio 81. Aplica la propiedad anterior y resuelve:

a) Despeja la variable en $-2x > 7$.

b) Despeja la variable en $-9x < -9$.

c) Despeja la variable en $\frac{x}{-2} \leq 2$.

Observación 19 Si observas la última propiedad, para que la relación de orden cambie, es porque has multiplicado en ambos lados por una cantidad negativa. Bajo esta idea, el símbolo de relación de orden cambia si se pasa a dividir o a multiplicar una cantidad negativa.

8.1.2 Intervalos

Los intervalos son útiles para representar la solución de las inecuaciones o para representar situaciones en diversos contextos. Estudiamos a continuación los intervalos que trataremos, asumiendo que $a, b \in \mathbb{R} \quad y \quad a < b.$

Ejercicio 82. Emplea la recta numérica para visualizar cada uno de los intervalos presentados a continuación.

Intervalo Abierto. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Ejemplo. Un intervalo abierto es:

$$(-2,3) = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$$

Intervalo Cerrado. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Ejemplo. Un intervalo cerrado es:

$$[5,10] = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 10\}$$

Intervalos Semiabiertos (Semicerrado): Pueden presentarse de varias formas:

a) a(abierto) y b (cerrado) es $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Ejemplo. Intervalo semiabierto por izquierda:

$$(0,7] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 7\}$$

b) a(cerrado) y b (abierto) es $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Ejemplo. Intervalo semiabierto por derecha es:

$$[0,7) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 7\}$$

Intervalos infinitos: Pueden presentarse de varias formas:

a) Intervalo de extremo a e infinito a la derecha:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}.$$

b) Intervalo de extremo a incluido e infinito a la derecha:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}.$$

c) Intervalo de extremo b e infinito a la izquierda:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}.$$

d) Intervalo de extremo b incluido e infinito a la izquierda:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}.$$

Ejemplo. Los siguientes son ejemplos de intervalos infinitos:

a) $(-2, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > -2\}$

b) $(-\infty, -3) = \{x \in \mathbb{R}: x < -3\}$

c) $[-10, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -10\}$.

d) $(-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$

Ejercicio 83. Teniendo en cuenta lo anterior indicado, resuelve:

a) Representa en la recta numérica los siguientes conjuntos:

i. $x \geq 5$	iii. $-2 < x \leq 10$	v. $-1 < x$
ii. $x < -5$	iv. $x \geq -5$	v. $x \geq 0$

b) Representa en intervalo las siguientes situaciones:

i. El señor Ramón tiene un sueldo igual o mayor a 3 millones.

ii. El volumen del salón de clase es menor que 150 unidades cúbicas.

iii. El juez estudiará entre 2 y 6 casos por mes.

iv. El salario de Miguel no es mayor de 3 millones.

8.2 Inecuaciones lineales

Una inecuación (desigualdad) lineal tiene la forma $ax + b < 0$ o $ax + b > 0$ o $ax + b \leq 0$ o $ax + b \geq 0$. El objetivo consiste en hallar el conjunto solución de la inecuación, es decir, hallar el conjunto de valores reales que hacen la inecuación verdadera. Esta solución en general será un intervalo.

Ejemplo. Las siguientes son inecuaciones lineales:

a) $2x + 3 \leq -3(x + 2) - 1$ b) $-3x + 2 \leq x < 2x + 5$

Para resolver inecuaciones lineales, hay que tener en cuenta algunas de las reglas empleadas para resolver ecuaciones, salvo que el signo de la desigualdad cambia cuando se multiplica o divide en ambos lados de la inecuación por números negativos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Resolver $\frac{2x-3}{2}+1<\frac{5(3x+2)}{3}-2$. Hacemos la eliminación de los paréntesis y la suma de las fracciones de cada lado. Es decir, $\frac{2x-3}{2}+\frac{1}{1}<\frac{15x+10}{3}-\frac{2}{1}$. Al sumar las fracciones queda $\frac{2x-3+2}{2}<\frac{15+10-6}{3}$. Al sumar, $\frac{2x-1}{2}<\frac{15x+4}{3}$. Como los denominadores son positivos se multiplica a cada lado por 6 y queda $3(2x-1)<2(15x+4)$. Al eliminar paréntesis, $6x-3<30x+8$. Al dejar la variable a un lado y números al otro, queda $6x-30x<8+3$, es decir, $-24x<11$. Como el factor que multiplica la x es -24, multiplicamos por $\frac{-1}{24}$ en cada lado, cambia el sentido de la desigualdad y tenemos $x>\frac{11}{-24}$. Finalmente, $x>-\frac{11}{24}$ y el intervalo solución es $\left(-\frac{11}{24},\infty\right)$.

Ejercicio 84. Con base en lo expuesto anteriormente halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a) $2(x-3)<4$

b) $x-2\geq -2(x+4)$

c) $3-2x>-6$

d) $2(\mathrm{x}-2)-3>2\mathrm{x}-1$

e) $-3x+2\leq x<2x+5$

f) $3(2-3\mathrm{x})>4(1-4\mathrm{x})$

g) $\frac{x+2}{-5}\leq 2x+3$

h) $\frac{9\mathrm{y}+1}{4}\leq 2\mathrm{y}-1$

i) $2x+3\leq -3(x+2)-1$

j) $\frac{3\mathrm{y}-1}{-3}<\frac{5(\mathrm{y}+1)}{-2}$

k) $(x+2)(x-5)\geq(x-1)(x-10)$

l) $-(1-x)\geq -3x+1$

https://youtu.be
/-JPX81zcElU
Video 14

8.2.1 Representación y lenguaje simbólico

Las inecuaciones también son útiles para representar algunas situaciones en las que se involucre la comparación de cantidades. En la representación simbólica, es necesario identificar plenamente las variables involucradas en la situación y formular la inecuación.

Ejemplo.

a) La cantidad de pacientes en la clínica supera los 300. Si p representa la cantidad de pacientes, entonces la desigualdad será $p > 300$.

b) El sueldo de Ana no es inferior de $\$1000000$. Si S representa el sueldo de Ana, entonces esta situación será representada como $S \geq 1000000$.

c) Juan trabaja como mínimo 3 horas. Si t es el tiempo que trabaja Juan, entonces $t \geq 3$.

d) El partido de fútbol se puede demorar a lo más dos horas. Si t representa el tiempo del partido, entonces $t \leq 2$.

e) El número de estudiantes graduados estuvo entre los 500 y 1000 estudiantes. Si e representa la cantidad de estudiantes graduados, entonces $500 < e < 1000$.

Ejercicio 85. Representa simbólicamente las siguientes situaciones. En caso de que sea necesario, resuelve la inecuación resultante.

a) Tengo por lo menos 5 cuadernos.

b) Los costos deben ser máximo de $\$250$ pesos por unidad.

c) Los ingresos deben ser mínimo de $5000000.

d) Debe existir utilidad en la empresa.

e) La utilidad debe superar los $1000 millones.

f) La utilidad debe oscilar entre $5000 y $30000.

g) El área de la caja debe estar entre 20 y 35 metros cuadrados.

h) La cantidad de pacientes debe superar los 2000.

i) El crecimiento de esta semana debe ser a lo más de 1500 bacterias.

j) Esta semana tuvimos pérdidas en la empresa.

k) Para el caso archivado, debes cobrar por lo menos el 10% de honorarios.

l) Si 3 veces un número se disminuye en 2, el resultado es menor de 4. ¿Qué se concluye sobre el número?

m) Si 2 veces un número aumentado en 8, el resultado es menor que -3. ¿Qué se concluye acerca del número?

CAPÍTULO 9. RELACIONES Y FUNCIONES

CAPÍTULO 9.

RELACIONES Y FUNCIONES

Abordamos el concepto con el cual concluimos introducción al razonamiento matemático. El concepto de función se puede utilizar para modelar amplias situaciones y tienen múltiples aplicaciones en todas las áreas del saber. Además, el concepto de función, como relación especial, hace parte del lenguaje en diversas disciplinas, como las ciencias e ingeniería, área de salud, ciencias económicas, entre otras. Lo anterior, motiva el estudio de las funciones y sus generalidades como parte fundamental en el proceso de formación de los estudiantes y que se está inmerso en aplicaciones en diversos contextos. Además, que su estudio se facilita, debido a que todos los aspectos relacionados en capítulos anteriores convergen de manera directa en el estudio de este capítulo.

Relaciones

El concepto de función captura conceptos como el de producto cartesiano y relación entre conjuntos. Una función es un tipo especial de relación que cumple una condición específica. Las funciones como relaciones tienen diversas representaciones, tales como tablas, gráfica, mediante expresiones algebraicas, conjuntos, entre otras, que posteriormente serán presentadas. De momento, nos encontramos con la representación de números reales a través de la recta numérica y luego, puntos en el plano, como una representación gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 86. Representa en la recta numérica los siguientes números:

a) -3	c) $-2,4$	e) $\frac{8}{3}$	g) $\sqrt{2}$
b) $\frac{7}{3}$	d) $\frac{1}{2}$	f) 7	h) $\frac{5}{5}$

− −−→

El producto cartesiano entre dos conjuntos A y B trabajado en el capítulo 1 se definió como el conjunto de pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo. Si $A = \{a, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$ entonces el producto cartesiano viene dado por:

$$A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

El producto cartesiano anterior, presenta pares ordenados que se pueden entender también, como todas las formas posibles en que se pueden relacionar los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto B. Pero esta no es la única relación que se puede establecer entre los conjuntos A y B, por ejemplo, una relación entre A y B, la cual llamaremos R puede ser

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$$

O también una relación S entre A y B puede ser

$$S = \{(a, a), (2, b)\}$$

En ambos casos, se evidencia que tanto la relación R como S forman son subconjuntos del producto cartesiano $A \times B$. Es decir, que estas dos corresponden a subconjuntos del producto cartesiano. Además, cualquier otra relación entre A y B será un subconjunto de $A \times B$, siendo esta la relación más grande que se puede establecer entre ambos conjuntos.

En general, si A y B son conjuntos no vacíos, una relación entre A y B, es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Es decir, si R es una relación entre los conjuntos A y B, entonces $R \subseteq A \times B$.

Ejercicio 87. Escribe por extensión los elementos del conjunto $B \times A$, con el par de conjuntos del ejemplo anterior. A partir de $B \times A$, defina dos relaciones T y V.

Ejercicio 88. Si A es el conjunto de estudiantes de un curso de razonamiento cuantitativo y B es el conjunto de asignaturas que pueden matricular en un período particular, ¿qué representa el producto $A \times B$?

Ejercicio 89. Una factura de supermercado relaciona en un mismo renglón varios ítems. Expresa la relación entre estos ítems como una relación entre conjuntos. Determina los elementos que conforman cada conjunto de la relación. *[Ayuda: En esta relación no se utilizan dos conjuntos]*

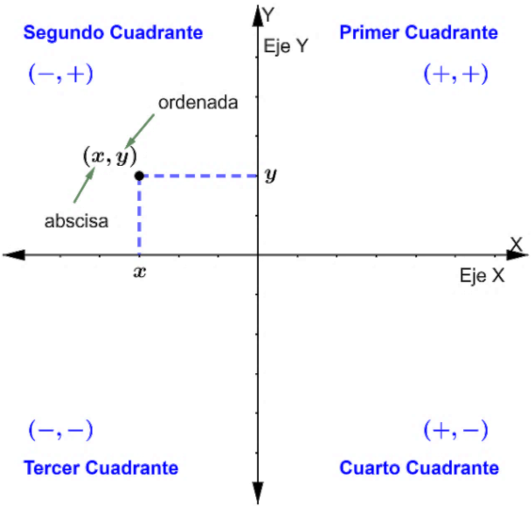
Del producto cartesiano $A \times B$ nos interesa estudiar ciertas relaciones especiales entre sus elementos, aquellas en las que todos los elementos del conjunto de partida, en este caso el conjunto A, estén relacionados con uno y sólo un elemento del conjunto de llegada, en este caso el conjunto B. Por ejemplo, si $A = \{a, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, la relación $M = \{(a, a), (2, a), (2, c)\}$ entre A y B no cumple con la condición indicada anteriormente, y como veremos más adelante no será función.

Las relaciones que estudiamos en adelante serán subconjuntos de

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$$

que geométricamente lo hemos estudiado a través del plano cartesiano. Por ejemplo, un elemento de una relación definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puede ser $(2,4)$. En este contexto, los pares ordenados de la relación serán números reales.

El plano cartesiano es la representación geométrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y consiste en la intersección de forma perpendicular de dos rectas numéricas en el cero. Al punto de intersección el cual es $(0,0)$ se le llama origen de coordenadas.



Ejemplo. Representar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

a) $(-3,4)$

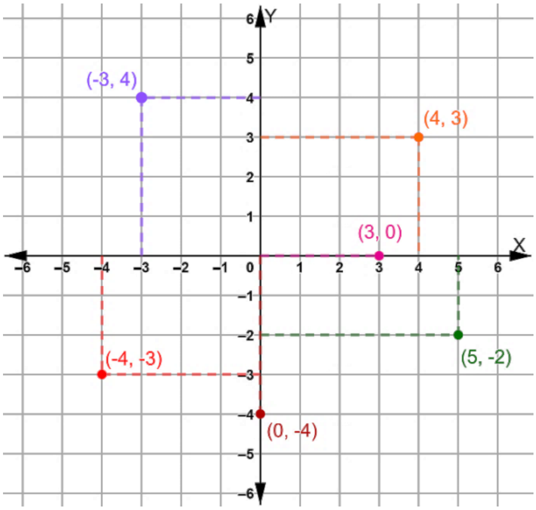
b) $(4,3)$

c) $(3,0)$

d) $(-4,-3)$

e) $(0,-4)$

f) $(5,-2)$



Ejercicio 90. Representa en el plano cartesiano los siguientes elementos:

a) $(1,2)$

b) $(0,2)$

c) $(-3,-1)$

d) $(0,-5)$

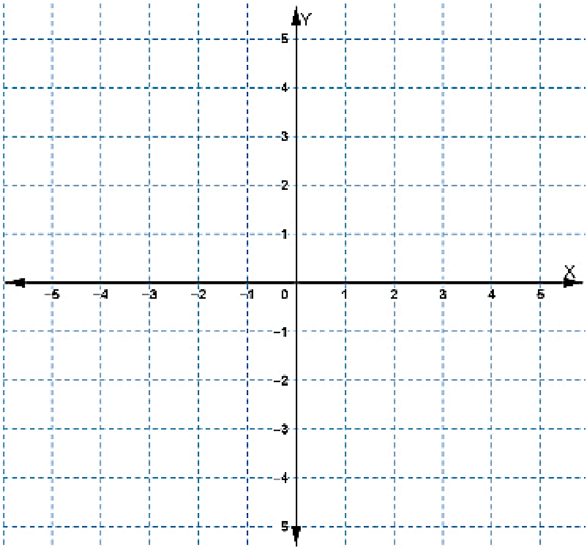
e) $(-3,5)$

f) $(-4,0)$

g) $(0,-3)$

h) $(\sqrt{2},0)$

i) $(-2,-1)$



El uso del plano cartesiano en la representación de puntos será indispensable para representar gráficamente relaciones y funciones. Esta representación es útil para visualizar el comportamiento de las relaciones entre dos variables.

Ecuación Lineal de dos variables

Antes de hablar de funciones es pertinente dedicar un momento a hablar de la relación lineal entre dos variables. En términos algebraicos diremos que una relación lineal se establece mediante una ecuación de la forma,

$$ax + by = c$$

donde x, y representan variables y los valores a, b y c corresponde a números reales constantes.

Ejemplo. Siete amigos llegan a un restaurante con un bono regalo de ciento sesenta y siete mil pesos. El restaurante les ofrece dos platos en oferta, el plato A cuesta veinticinco mil pesos y el plato B cuesta veintitrés mil pesos. ¿Cuál es la ecuación que representa el valor a pagar por el pedido de los 7 amigos?

Si x representa el número de pedidos del plato A y la variable y representa el número pedidos del plato B, tenemos que el valor a pagar por el pedido del plato A es $25 \cdot x$ (en miles de pesos) y el valor a pagar por el pedido de plato tipo B es $23 \cdot y$ (en miles de pesos). De esta forma ambos pedidos deben sumar $167.000. Es decir,

$$25x + 23y = 167$$

La solución de una ecuación de dos variables es una pareja ordenada de valores (s, t) tal que cuando se reemplaza el valor de s en la variable x y el valor t en la variable y la ecuación, $ax + by = c$, satisface la igualdad.

Ejemplo. En la ecuación $5x - 3y = -2$, tenemos que la pareja $(2,4)$ es una solución, puesto que al reemplazar la variable x por 2 y la variable y por 4 tenemos,

$$5(2) - 3(4) = -2$$

lo cual es cierto. Caso contrario sucede por ejemplo con la pareja (3,5), la cual al reemplazar la variable x por 3 y la variable y por 5 no cumple con la igualdad,

$$5(3) - 3(5) \neq -2,$$

dado que $5(3) - 3(5) = 0$. Así que la pareja $(3,5)$ no es una solución de la ecuación $5x - 3y = -2$.

Ejercicio 91. Verificar cuales de las siguientes parejas corresponde a soluciones de la ecuación lineal $-2x + 3y = 1$

a) $(-5, -3)$

d) $(-2, -1)$

b) $(-2,3)$ e) $(7,5)$

c) $(4,-1)$ f) $(1,-3)$

Como se observa en el ejercicio anterior existen varias parejas ordenada que corresponde a una solución de una ecuación lineal, de hecho, existen infinitas soluciones para cada ecuación lineal.

Para encontrar soluciones a una ecuación lineal solo se tiene que dar valores a una de las variables y despejar el valor correspondiente a la otra.

Ejemplo. Encontrar soluciones a la ecuación $4x - y = -3$.

Primero se considera un valor particular para una de las variables, por ejemplo, $x = 3$. Luego se reemplaza este valor en la ecuación, $4(3) - y = -3$ y así se obtiene la ecuación de una variable $12 - y = -3$. La solución de esta nueva ecuación es, $y = 15$. Luego la pareja ordenada $(3,15)$ es una solución de la ecuación $4x - y = -3$.

Observe este proceso tomando inicialmente el valor $y = -2$. Sustituyendo en la ecuación se tiene ecuación de una variable $4x - (-2) = -3$, cuya solución es $y = -\frac{5}{4}$. De esta forma se dice que la pareja $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$ es otra solución de la ecuación.

Ejercicio 92. Para la ecuación lineal $2x - 3y = -5$, completar el valor que falta para tener una solución.

a) $(-1,\quad)$ d) $(3,\quad)$

b) $(\quad,2)$ e) $(\frac{1}{2},\quad)$

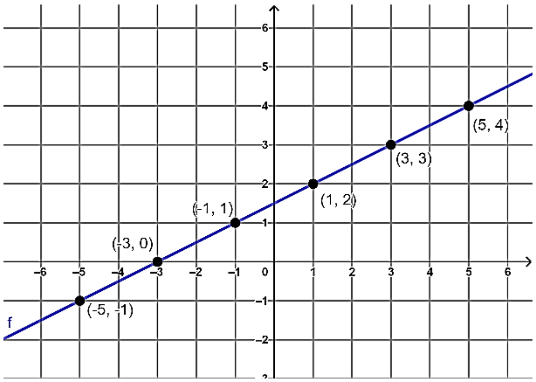
c) $\left(\quad,-\frac{1}{2}\right)$ f) $(\quad,-1)$

Como ya se mencionó las soluciones de una ecuación lineal son infinitas. Esto puesto que para cada valor que se le dé a una de la variable, la ecuación da el valor correspondiente a la otra variable y el cual forma una pareja ordenada que es solución de la ecuación. Ahora en el plano cartesiano a cada pareja ordenada le corresponde un punto. Es así como al conjunto de puntos solución de una ecuación lineal se le llama grafica de la ecuación. En el caso de las ecuaciones lineales es fácil dibujar los puntos de la solución ya que esto están sobre una línea recta.

Ejemplo. Dibujar seis puntos solución de la ecuación lineal $-x + 2y = 3$ y observar que estos se disponen sobre una línea recta en el plano cartesiano.

Primero mediante el proceso anterior se encuentra algunos puntos, $(-5,-1)$, $(-3,0)$, $(-1,1)$, $(1,2)$, $(3,3)$, $(5,4)$, usted puede verificar que estos corresponden a soluciones de la ecuación $-x + 2y = 3$.

Al ubicarlos en el plano cartesiano tenemos la siguiente gráfica, donde la línea que los une da cuenta de todos los puntos solución de la ecuación.



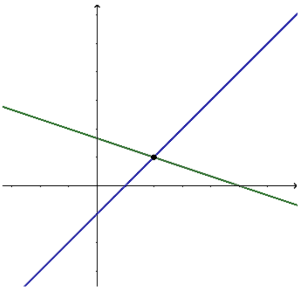
Cuando se considera dos ecuaciones de dos variables al tiempo, se dice que se tiene un sistema de ecuaciones lineales 2×2. Es decir:

Un sistema 2×2 tiene la forma:

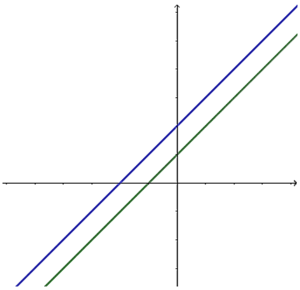
$$\begin{cases} a_1x + b_1y & = & c_1 & (Ec.1) \\ a_2x + b_2y & = & c_2 & (Ec.2) \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

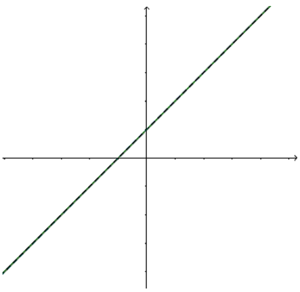
La solución del sistema definido por las ecuaciones $(Ec.1)$ y $(Ec.2)$ es el conjunto de los valores de x y y que satisfacen ambas ecuaciones. Así, una solución para el sistema corresponde a una pareja ordenada que es solución para ambas ecuaciones del sistema. Gráficamente se tiene que las soluciones de una ecuación lineal de dos variables corresponden a los puntos sobre una línea recta en el plano cartesiano. De geometría se sabe que dos líneas en un plano deben cumplir una de las tres condiciones siguientes:



Tienen un solo punto en común. En decir, el sistema tiene solución única



No tienen puntos en común. En este caso el sistema no tiene solución.

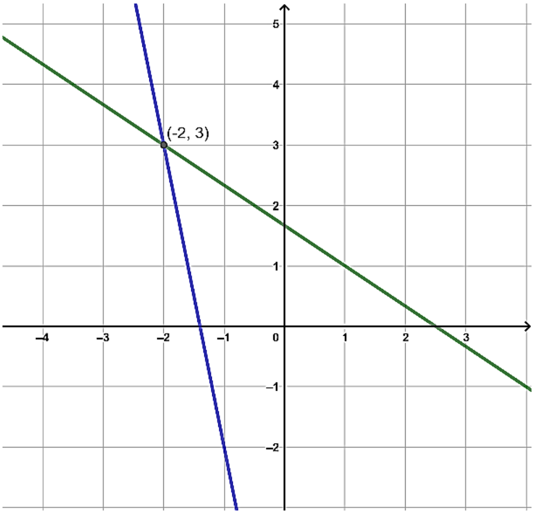


Coinciden en todos los puntos. El sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo: consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2.

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 5 & (Ec.1) \\ -5x - y & = & 7 & (EC.2) \end{cases}$$

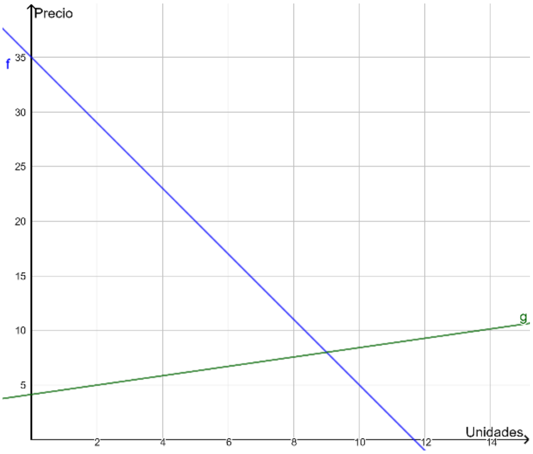
Una solución para este sistema es la pareja $(-2,3)$. De hecho, es la única pareja que es solución del sistema. Gráficamente se observa que esta es la única solución.



Ejemplo. La ecuación de demanda del mercado de un cierto tipo de camisas establece una relación entre el precio por camisa y el volumen de pedidos a ese precio (demanda). La ecuación de oferta relaciona el precio de la camiseta y la cantidad de camisetas dispuesta a la venta a ese precio (oferta). Si la relación de demanda está dada por la ecuación $(Ec.1)$ y la relación de oferta está dada por la ecuación $(Ec.2)$.

$$\begin{cases} 35x + 10y & = & 350 & (Ec.1) \\ -15x + 35y & = & 145 & (EC.2) \end{cases}$$

La representación gráfica muestra que este sistema tiene una única solución.



Esta solución es conocida como punto de equilibrio de la oferta y la demanda. Y aunque la gráfica evidencia una solución, esta no se ve de forma clara. Por este motivo se presentan a continuación tres métodos algebraicos para determinar la solución del sistema.

Recordemos que en la búsqueda de la solución de un sistema 2×2, se puede presentar alguno de los siguientes casos, con respecto al conjunto solución:

c) No Tener solución.
d) Tiene una única solución,
e) Tiene infinitas soluciones.

Los siguientes constituyen tres métodos para solucionar un sistema lineal 2×2.

[Método de sustitución]:

Se escoge una de las ecuaciones y se despeja una de sus variables (elegir la variable más sencilla de despejar).

Se sustituye la expresión de la variable resultado del paso 1 en la otra ecuación. En esta sustitución, la ecuación resultante es una ecuación con una sola incógnita.

Se soluciona la ecuación lineal resultado del paso anterior. El resultado de esta ecuación puede arrojar un sistema con única solución, infinitas soluciones o sin solución.

Si el resultado de paso 3 es solución única, se reemplaza esta solución en la ecuación del paso 2 y así obtener el resultado de la otra solución.

Ejemplo Hallar la solución del siguiente sistema empleando el método de sustitución.

$$\begin{cases} 7x - y = -11 \ (Ec.1) \\ -2x + 3y = 4 \ (Ec.2) \end{cases}$$

Se escoge una de las ecuaciones y se despeja una de sus variables (la más sencilla de despejar). En este caso se despejará la variable y de la ecuación $Ec.1$. Como resultado se tiene la expresión $y = 7x + 11$ la cual se sustituye en la ecuación que no se ha empleado, en este caso, se sustituye en la ecuación $Ec.2$. Como resultado de esta sustitución se tiene la ecuación

$$-2x + 3(7x + 11) = 4$$

Se elimina paréntesis en esta ecuación, se hace la respectiva transposición de términos, para despejar la variable x.

$$\begin{aligned} -2x + 3(7x + 11) &= 4 \\ -2x + 21x + 33 &= 4 \\ -2x + 21x &= 4 - 33 \\ 19x &= -29 \\ x &= -\frac{29}{19} \end{aligned}$$

Finalmente, se reemplaza $x = \frac{-29}{19}$ en $y = 7x + 11$ y así,

$$y = 7\left(\frac{-29}{19}\right) + 11 = \frac{-203}{19} + 11 = \frac{-203+209}{19} = \frac{6}{19}.$$

De esta manera, se concluye que la solución del sistema es:
$x = \frac{-29}{19}$, $y = \frac{6}{19}$, o visto como par, $\left(\frac{-29}{19}, \frac{6}{19}\right)$.

[Método de eliminación]:

Se elige la misma variable en las dos ecuaciones y se procede a que los coeficientes en (1) o (2) de la variable elegida sean los mismos, pero con signos opuestos. Esto se logra, multiplicando cada ecuación por valores adecuados, en este caso, se busca que estos coeficientes correspondan al mínimo común múltiplo de los dos coeficientes.

Las ecuaciones obtenidas en el paso anterior se suman. Esta suma hace que se elimine la variable tratada en el paso anterior.

Se resuelve la ecuación lineal en una variable resultante del paso anterior. Se procede a reemplazar este valor encontrado en una de las dos ecuaciones iniciales y se despeja la variable que hace falta. El sistema puede tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 2 \; (Ec.1) \\ 3x - 4y = 1 \; (Ec.2) \end{cases}$$

La variable a eliminar en este sistema será la variable x. Se multiplica la ecuación $Ec.1$ por el valor de (-3) y se multiplica la ecuación $Ec.2$ por (2). Esto hace que los coeficientes de la variable x sean iguales pero con signo contrario.

$$\begin{cases} (2x + 5y = 2)(-3) \; (Ec.1) \\ (3x - 4y = 1)(2) \; (Ec.2) \end{cases}$$

De esta multiplicación se obtiene el sistema equivalente al anterior

$$\begin{cases} -6x - 15y = -6 \; (Ec.1) \\ 6x - 8y = 2 \; (Ec.2) \end{cases}$$

Se suman ambas expresiones y se tiene lo siguiente $-23y = -4$. Entonces al despejar la variable y queda $y = \frac{-4}{-23} = \frac{4}{23}$.

Este valor se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema iniciar para despejar la variable x. Se elige la ecuación $Ec.1$ para hacer la sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 2 \\ 2x + 5\left(\frac{4}{23}\right) &= 2 \\ 2x + \frac{20}{23} &= 2 \\ 2x &= 2 - \frac{20}{23} \\ 2x &= \frac{46 - 20}{23} \\ 2x &= \frac{26}{23} \\ x &= \frac{26}{46} \\ x &= \frac{13}{23} \end{aligned}$$

Así la solución del sistema es $\left(\frac{13}{23}, \frac{4}{23}\right)$

[Método de igualación]:

Se despeja de ambas ecuaciones la misma variable.

Se igualan las expresiones resultantes del paso 1 y obtenemos una ecuación en una variable.

Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior.

Si el resultado del paso 3 es genera una solución, se evalúa el valor en una de las ecuaciones iniciales y se despeja para encontrar la segunda solución del sistema.

Ejemplo. Resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \ (Ec.1) \\ -x + 3y = 3 \ (Ec.2) \end{cases}$$

Se elige la variable y para despejar de ambas ecuaciones.

De la ecuación $Ec.1$ se tiene,

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -5 \\ 2y &= -5 - 3x \\ y &= \frac{-5 - 3x}{2} \end{aligned}$$

De la ecuación $Ec.2$ se tiene

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 3 \\ 3y &= 3 + x \\ y &= \frac{3 + x}{3} \end{aligned}$$

Las dos expresiones para y se igualan y se despeja la variable x.

$$\begin{aligned} \frac{-5 - 3x}{2} &= \frac{3 + x}{3} \\ 3(-5 - 3x) &= 2(3 + x) \\ -15 - 9x &= 6 + 2x \\ -9x - 2x &= 6 + 15 \\ -11x &= 21 \\ x &= -\frac{21}{11} \end{aligned}$$

Esta solución de x se sustituye en una de las ecuaciones de la variable y y queda:

$$y=\frac{3+x}{3}=\frac{3+\frac{-21}{11}}{3}=\frac{\frac{33-21}{11}}{3}=\frac{\frac{12}{11}}{3}=\frac{12}{33}$$

La solución del sistema es el par $\left(\frac{-21}{11},\frac{12}{33}\right)$.

Ejemplo. El siguiente sistema constituye uno que no tiene solución.

$$\begin{cases} 3x+2y &= & 5\ (Ec.1) \\ -9x-6y &= & 13\ (Ec.2) \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver por sustitución. Se despeja de la ecuación $Ec.1$ la variable x y queda:

$$\begin{aligned} 3x+2y &= 5 \\ 3x &= 5-2y \\ x &= \frac{5-2y}{3} \end{aligned}$$

Esta expresión para x se sustituye en la ecuación $Ec.2$ y queda

$$\begin{aligned} -9x-6y &= 13 \\ -9\left(\frac{5-2y}{3}\right)-6y &= 13 \\ \frac{-45+18y}{3}-6y &= 13 \\ \frac{-45+18y-18y}{3} &= 13 \\ \frac{-45}{3} &= 13 \\ -45 &= 39 \end{aligned}$$

Se observa que al tratar de despejar la variable y, esta se eliminó en el proceso de despeje. Además, se ha llegado a una expresión que es falsa para todo valor de y. Se concluye que el sistema no tiene solución, es decir, no es posible encontrar dos valores para x y para y que satisfagan ambas ecuaciones del sistema.

Ejemplo. El siguiente sistema constituye uno que tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} -x + 7y & = & 2 \ (Ec. 1) \\ 21y - 6 & = & 3x \ (Ec. 2) \end{cases}$$

Se puede emplear el método de igualación para resolver el sistema. Se despejará la variable x de ambas ecuaciones. De la ecuación $Ec. 1$ queda $7y - 2 = x$ y al despejar x de la ecuación $Ec. 2$ queda $\frac{21y-6}{3} = x$. Al igualar estas expresiones,

$$\begin{array}{ccc} 7y - 2 & = & \dfrac{21y - 6}{3} \\ 3(7y - 2) & = & 21y - 6 \\ 21y - 6 & = & 21y - 6 \\ 21y - 21y & = & -6 + 6 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

En este caso, se eliminó la variable a despejar de la ecuación. Además, se observa que se llega a una igualdad, la cual es verdadera para todo valor de y, pues la expresión no depende de esta variable. En este caso, el sistema tendrá infinitas soluciones, es decir, al sustituir tanto la variable x como y por cualquier número real, ambas ecuaciones se harán verdaderas.

Solución de problemas

La resolución de problemas en general, es un proceso que puede resultar complejo pues no hay manual ni reglas para darle tips al estudiante que quiera resolver un problema de aplicación. Sin embargo, la correcta lectura y el orden será pilar fundamental en el desarrollo de un problema de aplicación.

Algunas pautas para resolver un problema de aplicación son:

- Leer al menos dos veces el problema
- Comprender el problema.

- Identificar las variables del problema con la información que da el problema y con la pregunta que genera el problema.
- Utilizar un diagrama, gráfico o dibujo puede resultar útil para ver la situación.
- Plantear las ecuaciones del problema.
- Resolver el sistema con uno de los métodos expuestos anteriormente.
- Comprobar la solución e interpretar.

Ejemplo

Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 56 centímetros, si el largo es 4 centímetros mayor que el doble del ancho.

En este problema, se identifica un rectángulo de largo l y ancho a. Se pide hallar las dimensiones, es decir, hallar el valor que puede tomar l y a de tal forma que su perímetro sea 56 centímetros. EL perímetro es la suma de las longitudes de sus lados, es decir, $2a+2l=56$. Además, se tiene que el largo es 4 centímetros mayor que el doble del ancho, entonces la segunda ecuación del sistema es $l=4+2a$. El sistema a resolver es

$$\begin{cases} l &= 4+2a \ (Ec.1) \\ 2a+2l &= 56 \ (Ec.2) \end{cases}$$

En la ecuación $Ec.1$ ya está despejada la variable l, por lo que se empleará el método de sustitución para resolver el problema. Esta expresión para l se sustituye en la ecuación $Ec.2$ y queda:

$$\begin{aligned} 2a+2l &= 56 \\ 2a+2(4+2a) &= 56 \\ 2a+8+4a &= 56 \\ 6a &= 56-8 \\ 6a &= 48 \\ a &= \frac{48}{6} \\ a &= 8 \end{aligned}$$

El valor del ancho es $a = 8$ centímetros. La medida del largo es $l = 4 + 2a = 4 + 2(8) = 4 + 16 = 20$ centímetros.

Ejemplo

En un jardín infantil, el precio por mensualidad de cada niño es de $COP\$370000$. Los costos fijos que asume la administración por mantenimiento y otros gastos ascienden a $COP\$19500000$ y los costos variables por cada niño corresponden a $COP\$270000$. Determine:

a) Escriba la ecuación de ingreso.

El ingreso se determina multiplicando el precio de mensualidad por cada niño matriculado. Si x es la cantidad de niños matriculados, entonces la ecuación de ingreso es $I = 370000x$.

b) Escriba la ecuación de costo total.

El costo total de mantenimiento mensual del jardín se obtiene sumando los costos fijos y totales. Los costos fijos no dependen de la cantidad de niños matriculados. Los costos fijos dependen de cada niño y es equivalente a $270000x$. Entonces la ecuación de costo total viene dada por $C = 270000x + 19500000$.

c) Determine el punto de equilibrio.

El punto de equilibrio corresponde a aquél punto que muestra la cantidad de niños que deben estar matriculados para que los ingresos sean igual a los costos, es decir, para que el jardín no tenga pérdidas o su utilidad sea cero. Entonces se resuelve el problema igualando la ecuación de costo con la ecuación de ingreso, es decir,

$$\begin{aligned} I &= C \\ 370000x &= 270000x + 19500000 \\ 370000x - 270000x &= 19500000 \\ 100000x &= 19500000 \\ x &= \frac{19500000}{100000} \\ x &= 195 \end{aligned}$$

Significa que para el jardín no tener pérdidas deben estar matriculados 195 niños cada mes.

d) Determine el ingreso en este punto de equilibrio.

Los ingresos en este punto de equilibrio se determinan sustituyendo el valor de $x = 195$ en la ecuación de ingreso, por lo que $I = 370000(195) = 72.150.000$ pesos serán los ingresos mesuales.

Ejercicio 93.

Hallar el conjunto solución o la solución al problema.

1. $\begin{cases} x + 4y & = & 3 \\ -2x - 3y & = & 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ -x + 2y & = & 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 2y & = & -7 \\ 5x + 3y & = & -9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4p + 12q & = & 6 \\ p + 6q - 5 & = & 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 9 & = & 5y \\ 10x - 18 & = & 10y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5v + 2w - 2 & = & 0 \\ 8v - 3w + 6 & = & 0 \end{cases}$

7. Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de $\$1500$ por los primeros 100 mensajes de texto y $\$150$ por cada mensaje adicional. La cuenta de un usuario por mensajes de texto para el mes de junio es de $\$25000$. Determine el número de mensajes de texto que envió para este mes.

8. Un grupo de 13 personas entre adultos y niños pagaron $\$244500$ por ingresar a cierto evento en la plaza de toros. La entrada por cada adulto fue de $\$19500$ y por cada niño se paga $\$18000$. Determine el número de niños y adultos que ingresaron al evento teniendo en cuenta estas condiciones.

9. Se quieren mezclar vino de $\$15000$ por litro con otro de $\$12500$ el litro para lograr una mezcla con un precio de $\$14000$ el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 160 litros de la mezcla?

10. Determine dos enteros consecutivos en donde la diferencia de sus cuadrados es 167.

11. Determinar dos números enteros cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26. Use un sistema de ecuaciones para hallar los dos números.

12. El perímetro de un rectángulo es de $38\,mts$ y su largo es 4 metros mayor que el doble de su ancho. Determine las longitudes de los lados.

13. María tiene $\$5400000$ en billetes de $\$500$, $\$1000$ y $\$2000$. El número de billetes de $\$500$ es la cuarta parte de los billetes de $\$2000$ y tiene tantos billetes de $\$1000$ como de $\$500$ y $\$2000$ juntos. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene?

14. Un laboratorio compra suministros para inyectar pacientes en dos almacenes. El almacén 1 le ofrece agujas a un precio unitario de $\$30$ mientras que el almacen 2 se las ofrece a un precio por unidad de $\$25$. Las jeringas el almacén 1 se las ofrece a $\$40$ y el almacén 2 se las ofrece a $COP\$20$. Si en el almacén 1 pagó un valor de $\$13000$ y en el almacén 2 pagó $\$7500$ por comprar agujas y jeringas, determine la cantidad de agujas y jeringas que compró al final.

15. En un juzgado de una ciudad de Colombia se llevan a cabo procesos judiciales ordinarios que tardan 9 meses en resolverse; y procesos con tutela, que tardan 6 meses en resolverse. Si se resolvieron 15 procesos en total en un tiempo de 114 meses, determine el número de procesos ordinarios y con tutela que el juzgado resolvió bajo estas condiciones.

16. Un estudiante de último semestre de publicidad, tiene como proyecto la elaboración de una valla publicitaria rectangular de 46 metros de perímetro. Esta valla se debe iluminar en su borde con luces especiales pero las luces que debe instalar en dirección horizontal de la valla tiene un costo por metro de $\$8000$ y las que debe instalar de forma vertical tienen un costo por metro de $\$3500$. Al final pagó por la iluminación un valor total de $\$296000$. Ayúdale al estudiante a determinar los metros de cada iluminaria que debe instalar en los lados de la valla para culminar su proyecto.

17. En un sitio especializado de cuidado para animales, alimentan a perros callejeros y a perros domésticos extraviados. Cada perro callejero se come a medio día 2 kilogramos de alimento mientras que el perro doméstico se come 1 kilogramo de comida. A la noche, el perro callejero se come 1.5 kilogramos de comida y el doméstico se come lo mismo que a medio día. El sitio dispone durante un día de 20 kilogramos de comida para el almuerzo y 18 kilogramos para la comida y los perros se comen todo el alimento. Determine, en caso que sea posible, el número aproximado de perros callejeros y domésticos que cuidan durante ese día.

18. La ecuación de oferta de cierto producto viene dada por $p = q + 1$ y la ecuación de demanda viene dada por $p = -q + 5$, donde q es el número de unidades y p es el precio por unidad en miles de pesos. Determine el punto de equilibrio y finalmente, determine los precios alcanzados por el producto en este punto de equilibrio.

Funciones

El concepto de función se puede emplear para modelar amplias situaciones cotidianas y tienen múltiples aplicaciones en todas las áreas del saber. Se debe tener en cuenta que palabras como transformación, asociación, cambio, relación, mapeo son sinónimos de función.

Función como relación entre conjuntos

Iniciemos esta sección, definiendo algunas relaciones entre los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, las cuales nos facilitarán la introducción del concepto de función.

$$R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 7)\}$$

$$R_2 = \{(b, 5), (b, 6), (a, 1), (c, 2), (d, 7), (e, 5)\}$$

$$R_3 = \{(a, 1), (c, 6), (d, 6), (e, 2)\}$$

$$R_4 = \{(a, 4), (b, 4), (c, 4), (d, 4), (e, 4)\}$$

$$R_5 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2), (e, 1), (e, 2)\}$$

$$R_6 = \{(a, 7), (b, 6), (c, 5), (d, 4), (e, 3)\}$$

Estas son algunas de las relaciones que se pueden establecer entre ambos conjuntos. Pero de estas relaciones, nos interesa aquellas en las que a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B.

Ejercicio 94. Determina cuáles de las relaciones anteriores cumplen con la condición de que a cada elemento del conjunto A le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B.

Las relaciones determinadas por la condición en el ejercicio anterior corresponden a aquellas que cumplen con la definición de función.

Mas formalmente, una función entre los conjuntos X, Y, es una relación $f: X \to Y$ en la que a cada elemento del conjunto X le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto Y. Al conjunto X se le llama dominio y al conjunto Y se le llama codominio.

Ejercicio 95. Con base en la definición de función, responde:

a) Define dos conjuntos, cada uno con tres elementos. Escribe una relación que sea función.

b) Determina cuáles de las siguientes relaciones son función. Para aquellas que sean función, indica el dominio y codominio.

   i. La relación que hay entre el conjunto de estudiantes y el conjunto de asignaturas en una institución universitaria.

   ii. La relación entre el conjunto de pupitres de un curso de matemática y los estudiantes del curso de matemática.

   iii. La relación entre el conjunto de estudiantes y pupitres de un curso de literatura.

   iv. La relación entre precios y productos en un supermercado.

   v. La relación entre madres a hijos.

   vi. La relación entre hijos a madres.

   vii. La relación entre la medida de un lado de un cuadrado y su área.

   viii. La relación entre el radio de una circunferencia y su área.

   ix. La relación entre pacientes y enfermeros en una clínica.

x. La relación que hay entre venta de artículos y los ingresos recibidos.

Observación Algunas consideraciones para discutir con respecto las funciones:

- ✓ Las funciones se nombran generalmente con letras minúsculas, como f, g, h.

- ✓ Las funciones se pueden presentar de manera verbal, por tablas, definidas por pares ordenados, diagramas, gráficas en el plano cartesiano o a través de expresiones matemáticas, siendo estas las más comunes.

Ejemplo. La relación R_1 definida al inicio de esta sección se puede nombrar como f, es decir, $f = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4),(e,7)\}$. Esta es una representación mediante pares ordenados. El elemento $(a,1)$ es un par ordenado y es diferente al par ordenado $(1,a)$ que no pertenece a f. También, a es la primera componente y pertenece al dominio de f; y 1, es la segunda componente perteneciente al codominio.

- ✓ Como se mencionó en el ítem anterior, el par ordenado

$$(x,y) \neq (y,x).$$

Ejemplo. Si alguien desea pedir un domicilio, debe indicar la dirección de la casa, por lo que al final debe indicar el par de números que corresponden a la ubicación exacta. Note que el dar los números invertidos podría generar una larga espera. Mira el siguiente par de placas que no corresponden a la misma ubicación.

$$\boxed{44 - 35} \neq \boxed{35 - 44}$$

- ✓ El valor y en el codominio es la imagen de x bajo la función f. Se escribe $y = f(x)$, indicando que cuando x pasa a través de f, se transforma en el valor y. Se lee y es la imagen de x bajo f o también decimos que y es el resultado de evaluar f en x.

Ejemplo. En $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 7)\}$, tenemos $f(a) = 1$, es decir, 1 es la imagen de a bajo f. También se tiene, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$, $f(e) = 7$.

- ✓ Con respecto al par ordenado (x, y), tenemos:

Variable independiente: Es la variable de la cual depende la función. Los valores que asume hacen parte del dominio, es decir, corresponden a la primera componente del par ordenado. Generalmente, se representa con la letra x.

Ejemplo. Suponga que x corresponde a la variable independiente de una función que llamaremos f y en donde la variable se transforma de la siguiente forma: x se multiplica por -2 y al resultado se suma 3. La expresión algebraica de la función es $-2x + 3$ y escribimos $y = f(x) = -2x + 3$. La expresión $f(x)$ indica que la función f está dependiendo de la variable x y es leido f de x.

Variable dependiente: Sus valores hacen parte del codominio y cambia conforme cambia los valores de la variable x. La variable dependiente corresponde a la segunda componente del par ordenado y generalmente se representa como y o también $f(x)$.

Ejemplo. La función $y = f(x) = -2x + 3$, indica que la variable dependiente es la variable y. Observe, además; que si $x = 1$, entonces $y = f(1) = 1$, es decir, la variable independiente x se ha sustituido en cada aparición de la expresión algebraica por el valor de $x = 1$. Así mismo, si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 3$, mostrando esto el cambio de la variable y conforme cambia la variable x.

Ejemplo. Determina cuál de las dos relaciones en las siguientes tablas es función. Justifique su respuesta y en caso de ser función, use la notación $f(x) = y$ para representar la relación entre los elementos.

x	0	3	2	-1	-3	-1
y	10	5	4	2	5	3

Tabla 1

x	0	3	2	-1	-3	-1
y	10	5	4	2	5	2

Tabla 2

Ejemplo. Los siguientes corresponden a ejemplos de funciones reales y las imágenes de algunos valores que hacen parte de su dominio.

a) Si $f(x) = 3x + 1$, la transformación indica que x se envía en un elemento que es el resultado de tomar x, multiplicarlo por 3 y sumarle 1. Lo cual indica, que x será sustituido en la expresión por el valor que se indique dentro de los paréntesis.

i. $f(0) = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

ii. $f(1) = 3 \cdot\ 1 + 1 = 4$

iii. $f(-4) = 3 \cdot\ (-4) + 1 = -12 + 1 = -11$

iv. $f\left(-\frac{3}{7}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + 1 = -\frac{9}{7} + 1 = \frac{-9+7}{7} = \frac{-2}{7}$

v. $f(a) = 3a + 1$

vi. $f(x + 2) = 3(x + 2) + 1 = 3x + 6 + 1 = 3x + 7$

vii. $f(x + h) = 3(x + h) + 1 = 3x + 3h + 1$

viii. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3x+3h+1-(3x+1)}{h}$

$$= \frac{\cancel{3x}+3h+\cancel{1}-\cancel{3x}-\cancel{1}}{h} = \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

b) Si $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$, entonces:

i. $g(2) = -2(2)^2 + 3 \cdot\ 2 - 1 = -2 \cdot\ 4 + 6 - 1$
$= -8 + 5 = -3$

ii. $g(-1) = -2(-1)^2 + 3(-1) - 1$
$= -2 \cdot\ 1 - 3 - 1 = -2 - 3 - 1 = -6$

iii. $g(a+2) = -2(a+2)^2 + 3(a+2) - 1$
$= -2(a^2 + 4a + 4) + 3a + 6 - 1$
$= -2a^2 + 8a - 8 + 3a + 5$
$= -2a^2 + 11a - 3$

Ejercicio 96. Hallar las imágenes indicadas y simplifica tanto como sea posible.

a) Si $f(x) = 4$, halla $f(0)$, $f(-2)$, $f(x+h)$, $f(a)$, $3f(3) - 11$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

b) Si $g(x) = -x^2 - 2x + 5$, halla $f(-2)$, $f(-a)$, $2f(-2) - 5f(1)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Retomando el cálculo de dominio, hay que precisar que la dificultad de hallarlo depende de la función que se tenga, en ese sentido, se exhibirán algunos casos particulares de funciones en donde, empleando los elementos vistos en este curso, se podrán hallar los dominios sin mayor dificultad, como son el resolver ecuaciones lineales, cuadráticas e inecuaciones lineales.

Ejemplo. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$f(x) = 2x^2 + 3x + 3$ Esta corresponde a una función cuadrática y el dominio es el conjunto de todos los números reales. Esto, debido a que es siempre posible hallar la imagen de cualquier número real bajo esta función. Entonces, $Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$.

Observación: Una función cuadrática es de la forma

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

El dominio es el conjunto de los números reales.

$g(x) = -3x + 5$ es una función es lineal. Como se observa, no ocurre ningún error al estimar la imagen de cualquier número real, por lo que el dominio de esta función lineal es el conjunto de números reales. Es decir, $Dom\big(g(x)\big) = \mathbb{R}$.

Observación: Una función lineal es de la forma

$f(x) = mx + b$, donde $m \neq 0$ es la pendiente y $b \in \mathbb{R}$ se denomina el corte con el eje Y.

El dominio de una función lineal es el conjunto de números reales.

$h(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ es una función racional. Esta función presenta problemas cuando el denominador es cero. Para que $h(x)$ esté bien definida, el denominador debe ser diferente de cero, es decir, $x + 2 \neq 0$. Para resolver este problema, se determina cuándo el denominador es cero y se excluyen del conjunto de números reales, es decir, se resuelve la ecuación $x + 2 = 0$. La solución es $x = -2$. Este valor no hace parte del dominio pues $h(-2)$ no está bien definida. En conclusión, $Dom\big(h(x)\big) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

$w(x) = \frac{3x-2}{x^2+3x-4}$ es una función racional. A diferencia de la función anterior, en este caso debemos saber cuándo $x^2 + 3x - 4 = 0$, lo cual nos exige resolver una ecuación cuadrática. La solución de esta ecuación se excluye del conjunto de los números reales. Al emplear la fórmula cuadrática, se encuentra que la solución es $x = -4$ y $x = 1$. Así, el dominio de $w(x)$ es

$$Dom\big(w(x)\big) = \mathbb{R} - \{-4,1\}.$$

Observación Una función racional tiene la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios de grado n, como los estudiados en capítulo 5. Además, el dominio de las funciones racionales, son todos aquellos valores para los cuales $Q(x) = 0$, lo cual exige resolver una ecuación polinómica, que en nuestro caso, será de grado uno (lineal) o grado dos (cuadrática). Esto implica que $Dom\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}: Q(x) = 0\}$.

$r(x) = \sqrt{3 - 5x}$ es una función radical. El dominio de esta función está compuesto por todos los números reales que hacen de la expresión $3 - 5x$ un número positivo, es decir, $3 - 5x > 0$. Además, se puede tener que $3 - 5x = 0$ pues $\sqrt{0} = 0$. Entonces para hallar el dominio de $r(x)$ se debe resolver la inecuación lineal $3 - 5x \geq 0$, en cuyo caso la solución, de acuerdo a lo trabajado en el capítulo 8 es $x \leq \frac{3}{5}$. Entonces, se concluye que el dominio es $Dom\big(r(x)\big) = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 3/5\} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right]$.

Observación Una función radical con radicando lineal es de la forma $f(x) = \sqrt{ax + b}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. El dominio de la función es el conjunto de números reales que hacen de la expresión $ax + b$ una cantidad mayor o igual a cero, es decir, $ax + b \geq 0$, por lo que $Dom\big(f(x)\big) = \{x \in \mathbb{R}: ax + b \geq 0\}$.

Es claro que los conceptos y estrategias de solución para el cálculo del dominio, requiere el manejo de todo lo trabajado hasta este capítulo.

Ejercicio 97. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

b) $g(x) = \frac{3x-1}{8x-3}$

c) $h(x) = \frac{5x^3-3x+1}{x^2+7x+6}$

d) $r(x) = \sqrt{3x-5}$

e) $s(x) = \frac{8}{\sqrt{10-13x}}$

f) $t(x) = \frac{3x^3+2x-1}{5}$

Operaciones entre funciones

Así como se combinan los números a través de las operaciones básicas, se pueden combinar las funciones a través de operaciones de suma, resta, producto, cociente y composición. Por el enfoque del texto, la operación división entre funciones no será tenida en cuenta. Para el estudio de la división, puede consultar las fuentes bibliográficas sugeridas.

La idea consiste en realizar correctamente operaciones entre expresiones algebraicas, pues como se vio previamente, son una forma conveniente de representar funciones, es decir, a través de las llamadas fórmulas que relacionan la variable x con la variable y. A continuación, se desarrollará un ejemplo de cada operación y se propondrá que el lector debe resolver con base en el ejemplo resuelto.

Suma La suma de $f(x)$ y $g(x)$ con dominios $Dom(f(x))$ y $Dom(g(x))$ se define como:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de la suma es

$$Dom(f+g) = Dom(f(x)) \cap Dom(g(x)).$$

Ejemplo. Si $f(x) = x^2 + 8$ y $g(x) = 3x^2 - 4x + 5$, al sumar queda

$$\begin{aligned}(f+g)(x) = f(x) + g(x) &= x^2 + 8 + 3x^2 - 4x + 5 \\ &= 4x^2 - 4x + 13\end{aligned}$$

Como $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Dom(g) = \mathbb{R}$, entonces $Dom(f+g) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 98. Halla la suma de las siguientes funciones.

a) Si $f(x) = -7x^3 + 5x^2 - 3x - 3$ y $g(x) = (x-5)^2$, halla $(f+g)(x)$

b) Si $f(x) = \sqrt{2x-5} - 13$ y $g(x) = \sqrt{8-3x} - 3x - 11$, hallar $(f+g)(x)$.

Resta La diferencia entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con dominios $Dom(f(x))$ y $Dom(g(x))$ se define como

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Al restar, se debe tener en cuenta que el signo de la resta hace que cambie los signos de los términos del sustraendo. El dominio de la resta es igual al dominio de la suma, es decir,

$$Dom(f-g) = Dom(f(x)) \cap Dom(g(x))$$

Ejemplo. Si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{3x-2}$ entonces al restar $g(x)$ de $f(x)$ queda

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - \sqrt{3x-2}$$

Como $Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$ y $Dom(g(x)) = [2/3, +\infty)$, entonces, $Dom(f-g) = [2/3, +\infty)$.

Ejercicio 99. Si $f(t) = -3t^2 - 1$ y $g(t) = 2t^4 - 5t^3 - t - 2$, halla el resultado de las funciones $(f-g)(t)$ y $(g-f)(t)$.

Ejercicio 100. Una compañía de alimentos para vacas produce cierta cantidad de complemento x a un costo variable de $\$82$ [en miles de pesos] por cada kilo. Los costos fijos son de $\$120000$ al mes. Además, el alimento se vende a $\$135$ el kilo. Escriba:

a) La función ingreso.

b) La función costo total.

c) La función utilidad.

Producto El producto $f(x)$ y $g(x)$ con dominios $Dom(f(x))$ y $Dom(g(x))$ se define como:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio es $Dom(f \cdot g) = Dom\big(f(x)\big) \cap Dom(g(x))$.

Ejemplo. Si $f(x) = 2x$^$2 - 5x$ y $g(x) = x + 5$ hallar el resultado de $(f \cdot g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= (2x^2 - 5x)(x + 5) = 2x^3 + 10x^2 - 5x^2 - 25x \\ &= 2x^3 + 5x^2 - 25x\end{aligned}$$

Ejercicio 101. Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ y $g(x) = \frac{3}{x}$, halla $f(x) \cdot g(x)$

Composición La composición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con dominios $Dom(f(x))$ y $Dom(g(x))$ se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donde $Dom(f \circ g) = \{ x \in Dom(g) : g(x) \in Dom(f)\}$

La composición de $f(x) = x^2 - 5x$ y $g(x) = \sqrt{x + 3}$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x+3}\big) &= \big(\sqrt{x+3}\big)^2 - 5\sqrt{x+3} \\ &= x + 3 - 5\sqrt{x+2}\end{aligned}$$

Es decir, $g(x)$ es reemplazada por la variable x de la función $f(x)$. Por otro lado, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$, evidenciando este resultado que la composición no es una operación conmutativa.

Ejercicio 102. Calcule $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{x+1}$.

Ejercicio 103. Halla dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que cumpla la condición que $h(x) = f(g(x))$, conociendo que

$$h(x) = \sqrt[5]{(3x-1)^2}.$$

Gráfica de una función

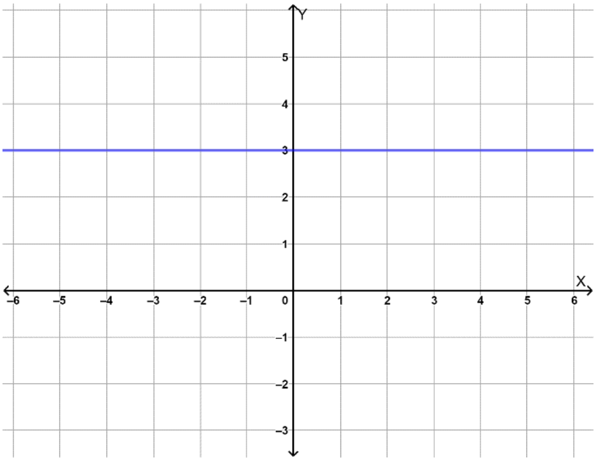
Antes de iniciar recordemos que las funciones que se tratan en este texto corresponden a relaciones entre números reales, expresada esta relación a través de una expresión algebraica. Sin embargo, la representación algebraica es útil y cómoda porque sintetiza la relación entre las variables involucradas, pero no permite visualizar el comportamiento de la variable dependiente conforme la variable independiente varía. Para ello, se hace necesario la incorporación de gráficas, pues en la mayoría de la literatura cotidiana, las gráficas son un apoyo visual en el análisis de eventos en diversos contextos.

La gráfica de una función $f(x)$ corresponde a todos los puntos sobre el plano cartesiano cuyas coordenadas son de la forma $(x, f(x))$. Para determinar algunos puntos de la gráfica de una función $f(x)$ se realiza la tabulación a través de una tabla en donde se elige de manera conveniente valores que serán sustituidos por la variable independiente y que hacen parte del dominio de la función. Esta asignación permite obtener puntos que serán ubicados en el plano y que posteriormente, serán unidos de forma conveniente hasta obtener una forma aproximada de la gráfica de la función.

Presentamos algunos ejemplos de gráficas de funciones y queda como ejercicio fortalecer el proceso de graficar con algunos ejercicios propuestos.

Ejemplo. Función constate $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. Realizar la gráfica de la función $f(x) = 3$.

Iniciamos destacando que esta función, cuya representación algebraica es una constate, no depende de la variable independiente x, por lo que el dominio es el conjunto de los números reales, es decir, $Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R}$. Además, para cualquier valor que asigne a la variable x, el resultado será el mismo. La gráfica de una función constante corresponde a una línea recta que pasa por $y = 3$.

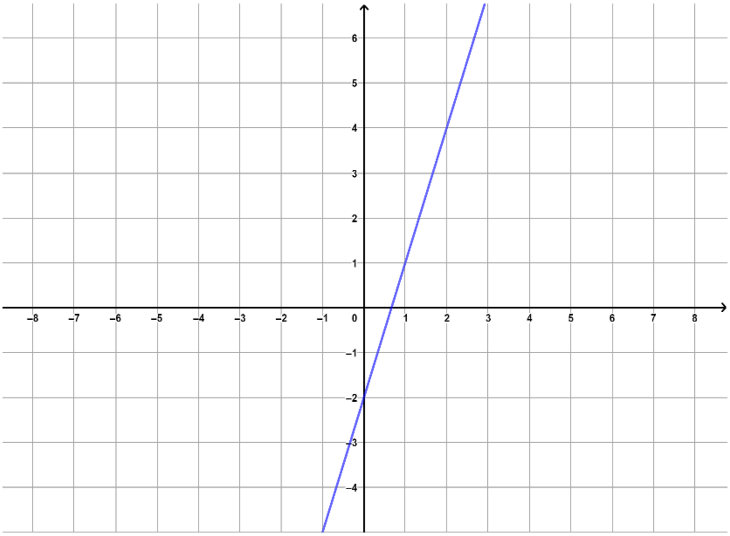


https://youtu.be
/yv7OUpkLn1U
Video 15

Ejemplo. Función lineal $f(x) = mx + b$, con $m \neq 0$ y $m, b \in \mathbb{R}$, siendo m la pendiente de la función y b el intercepto. Representar la gráfica de $f(x) = 3x - 2$.

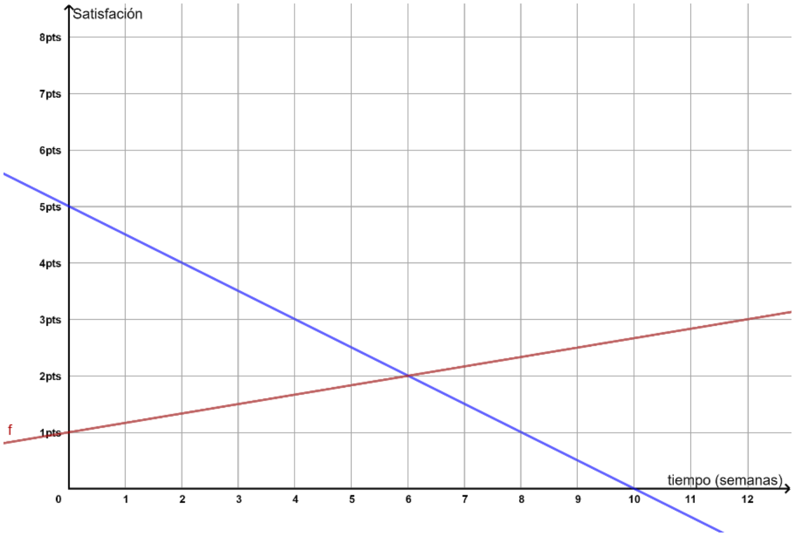
En este caso, se tiene una función lineal con dominio el conjunto de los números reales. La siguiente tabla muestra algunos valores en el dominio y su respectiva imagen. Además, observe que esta tabla induce un conjunto de puntos que se ubicarán en el plano cartesiano. La gráfica de una función lineal es una línea recta. Esta puede ser creciente si $m > 0$ o decreciente si $m < 0$.

x	$y = f(x)$	Punto a ubicar
-1	-5	$(-1,-5)$
-2	-8	$-2,-8)$
0	-2	$(0,2)$
1	1	$(1,1)$
2	4	$(2,4)$



Ejemplo. [Problema contextualizado]

Un empresario caleño decide fundar una empresa que se dedica a prestar servicio de aseo a las grandes empresas. Decide iniciar con dos empresas, una en Cali (Azul) y la otra en Bogotá (Rojo). El propósito de su servicio es brindar el mejor servicio y atención al cliente, para lo cual decide hacer un estudio de satisfacción por parte de los clientes, y para ello se fija un tiempo máximo de 10 semanas para determinar la calidad del servicio y emplear mejoras. La escala de satisfacción se maneja de 0 a 5, siendo 0 la más baja y 5 la más alta. Los resultados obtenidos finalizadas las 10 semanas se muestran en la siguiente gráfica. Con base en la gráfica, responde las siguientes preguntas:



a) Iniciando la empresa, ¿cuáles son los niveles de satisfacción en cada ciudad?

b) Cuando inicia la empresa, no ha transcurrido semanas por lo que $t = 0$, entonces en Cali el nivel de satisfacción es 5 mientras en Bogotá es 1.

c) De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es la tendencia de satisfacción en cada ciudad al transcurrir cinco semanas?

d) Entre 0 y 5 semanas los niveles de satisfacción son: En Cali tienden a disminuir, mientras que en Bogotá tiende a mejorar.

e) Al cabo de la cuarta semana, ¿cuál es el nivel de satisfacción de los clientes en Cali?

f) En el tiempo $t = 4$ el nivel de satisfacción es de 3 puntos.

g) ¿Considera que los niveles de satisfacción serán iguales en el algún momento? Justifique.

h) Si, pues en el tiempo $t = 6$ las dos curvas se cortan, significando esto que coinciden y así, el nivel de satisfacción es de 2 puntos.

i) El nivel de satisfacción 2.5 aproximadamente, ¿en qué ciudad y tiempo aproximado se alcanza?

j) Este nivel se alcanza en Cali al cabo de 5 semanas, mientras que en Bogotá al cabo de $8\frac{1}{2}$ semanas, aproximadamente.

k) A partir de la gráfica, ¿es posible concluir que la tendencia de satisfacción se mantendrá o tendrá alguna mejora?

l) No, pues esta gráfica muestra el comportamiento de atención al cliente durante las primeras 10 semanas.

m) ¿Es posible obtener el nivel de satisfacción al cabo de la semana 11?

n) No, debido a que el estudio se hace corresponde a la semana 10.

Ejemplo. Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Representar en el plano cartesiano, la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

La gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual abre hacia arriba si $a > 0$, o abre hacia abajo, si $a < 0$. Para realizar la gráfica de una función cuadrática, sugerimos los siguientes pasos.

✓ Hallar el vértice de la parábola. El vértice corresponde al punto más bajo $(a > 0)$ o alto $(a < 0)$ de la parábola. Las coordenadas del vértice $V(h, k)$ se puede determinar a partir de la siguiente expresión:

$$V(h,k) = V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

En este caso, tenemos que $a = 1$ y $b = 4$. Por tanto, $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot 1} = -2$. Ahora, su imagen es $f(-2) = -8$. El punto vértice tiene coordenadas $(-2, -8)$ siendo este, un punto fundamental de la gráfica.

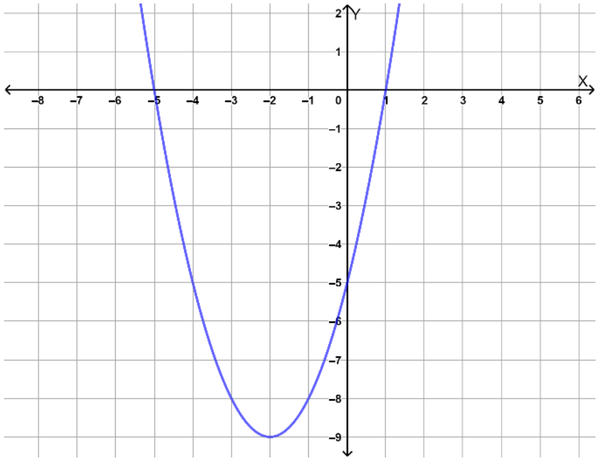
- ✓ Cortes con el eje Y. El corte con el eje Y se determina hallando la imagen de $x = 0$. Es decir, $f(0) = -5$. Por tanto, el punto por donde pasa en el eje Y es $(0, -5)$.

- ✓ Cortes con el eje X. Los cortes con el eje X, en caso de que existan, corresponde a la solución de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Entonces $x^2 + 4x - 5 = 0$ tiene solución $x = -5$ y $x = 1$. Tenemos los puntos sobre el eje X dados por $(-5,0)$ y $(1,0)$.

Con la información obtenida anteriormente y dando otros valores en la tabulación, obtenemos un conjunto de valores convenientes para trazar la gráfica de la función cuadrática.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x)}$	**Punto en el plano**	**Característica**
1	0	$(1,0)$	Corte con el eje X
-5	0	$(-5,0)$	Corte con el eje X
0	-5	$(0,-5)$	Corte con el eje Y
-2	-8	$(-2,-8)$	Vértice de la parábola
-1	-8	$(-1,-8)$	Valor adicional en la tabulación
2	7	$(2,7)$	Valor adicional en la tabulación

La gráfica de la función se muestra a continuación y como se puede observar, esta presenta una simetría respecto a una recta vertical que pasa por su vértice. Además, abre hacia arriba debido a que el valor de a es positivo.



Ejemplo. [Problema contextualizado]

a) Una empresa dedicada a la producción y venta de iPods, determina que la utilidad U [en millones] en la producción y venta de x cantidad [$\times$ 10] de unidades viene dada por la expresión $U(x) = -2x^2 + 20x - 42$.

   i. ¿Qué interpretación le da al problema cuando $x = 0$?

   La función U depende de la variable nivel de producción, que significa las unidades que la empresa fabrica. En el caso $x = 0$ significa que no hay producción, entonces $u(0) = -42$. Esto significa que no producir iPods, le genera a la empresa pérdidas por 42 millones.

   ii. ¿Qué nivel de producción y venta debe dar para tener utilidad de \$6 millones?

   Se quiere resolver el problema de saber el número de unidades x para que $U(x) = 6$, por lo que hay que resolver la ecuación cuadrática $-2x^2 + 20x - 42 = 6$, cuya solución de acuerdo con la fórmula cuadrática es $x = 4$ o $x = 6$. Hay dos niveles de producción que generan la misma utilidad. El gerente de la empresa decide producir 40 unidades para generar dicha utilidad.

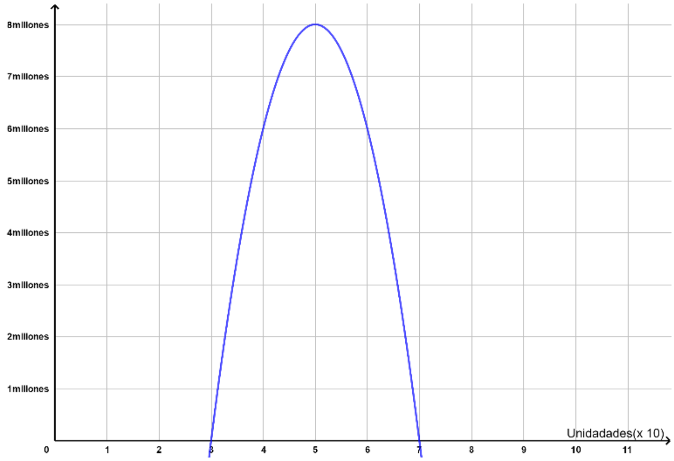
iii. ¿Qué nivel de producción se debe dar para que la empresa llegue al punto de equilibrio, es decir, para que la utilidad sea cero?

En el caso que la utilidad sea cero, se busca resolver la ecuación $U(x) = 0$, es decir, resolver la ecuación cuadrática $-2x^2 + 20x - 42 = 0$. Al emplear la ecuación cuadrática se obtiene como resultado $x = 30$ o $x = 70$ unidades. Esto significa que el producir este número de unidades le genera un punto de equilibrio, es decir, no hay ganancia ni pérdidas.

iv. Bajo este modelo de producción y venta, ¿es posible determinar la utilidad máxima?

De acuerdo a la forma de la función cuadrática, si es posible hallar tal utilidad máxima, debido a que la parábola abre hacia abajo pues el valor $a = -2$ es negativo. Para hallar la utilidad máxima, se debe hallar las coordenadas del vértice. Se halla el valor de h es el nivel de producción que maximiza la utilidad, entonces $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2\cdot(-2)} = 5$. La utilidad máxima es $U(5) = 8$. Entonces, la conclusión para el gerente es que para tener la utilidad máxima se deben producir y vender 5 iPods y la utilidad máxima es de \$8 millones.

La gráfica es obtenida con la información obtenida al resolver lo ítems anteriores. Además, se observa que el vértice, como punto máximo de coordenadas (5,8) nos muestra que para que la utilidad vaya en aumento se deben producir y vender entre 30 y 50 iPods, mientras que la utilidad empieza a disminuir para niveles de producción que están entre 30 y 70 iPods.



Ejercicio 105. Teniendo en cuenta los aspectos teóricos vistos en esta sección, resuelve:

a) Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.

i. Escribe el producto cartesiano $A \times B$.

ii. Defina una relación y una función entre A y B.

b) Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, responde:

i. ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

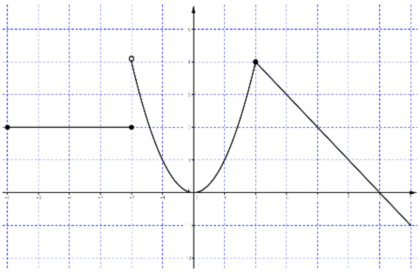
ii. ¿Cuántos elementos tiene $B \times A$?

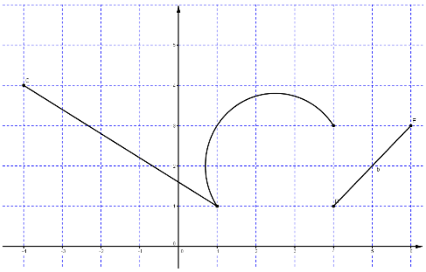
c) Si A es un conjunto cuyos elementos son todas las personas de una oficina de un juzgado y B es el conjunto de todos los usuarios que asisten determinado día a esa oficina, ¿qué interpretación le darás al producto cartesiano $A \times B$?

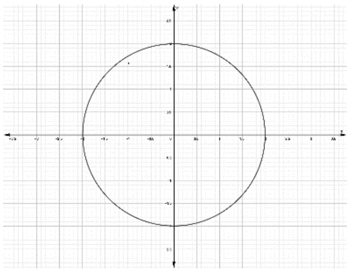
d) Relación costo de pasajes en el sistema de transporte masivo MIO. Escriba una relación entre el número de viajes diarios que hace una persona en el MIO y el costo que debe pagar por esos pasajes. Generalice esta relación con una expresión algebraica.

e) Relación de infracciones en vehículo con su costo. Escriba mediante una tabla las infracciones que usted conoce y que puede cometer conduciendo vehículo y el valor que debe pagar por tal infracción.

f) Con base en el concepto de función, determina cuáles de las siguientes gráficas corresponde a gráficas de función y cuáles no. Justifica en cada caso.







g) Halla las siguientes imágenes para la función dada.

i. $f(0)$, $f(-2)$, $f(x+h)$, $f(a)$, $3f(3)-11$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
si $f(x)=4$.

ii. $g(-2)$, g(7), $g(a+b)$, $2g(1)-5g(-4)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$
si $g(x)=5x-7$.

iii. $h(-2)$, $h(-a)$, $2h(-2)-5h(1)$
si $h(x)=-2x^2+3x-2$.

iv. $r(5)$, $r(-2)$, $r(-3)-2r(5)$
si $r(x)=\frac{x+3}{x-1}$.

v. $s(5)$, $s(-3), -s(0)+5s(-4), s(a+b)$
si $r(x)=\sqrt{3x^2+2x+1}$.

h) Realiza la gráfica de las siguientes funciones.

i. $f(x)=6$

ii. $g(x)=-5x+4$

iii. $h(x)=\frac{1}{3}x-1$

iv. $m(x)=x^2+1$

v. $n(x)=x^2-9$

vi. $p(x)=3x^2+5x-8$

vii. $q(x)=-2x^2+7x-2$

viii. $r(x)=3(x-2)(x+3)$

i) Halla el dominio de las siguientes funciones:

i. $f(x)=3x^3+5x-4x+1$

ii. $g(t)=\frac{4t+1}{t^2+1}$

iii. $g(x)=\frac{3x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$

iv. $h(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$

v. $r(x)=\frac{x^5}{x^2+7x+1}$

vi. $s(x)=\sqrt{5-7x}$

vii. $t(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-\pi}}$

viii. $u(x)=\frac{2x^2+7x+10}{\sqrt[3]{x-1}}$

j) Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$, entonces:

i. $f(-2) = 1$

ii. $f(-2) = -3$

iii. $f(-2) = 13$

iv. $f(-2) = -15$

k) Si $f(x) = \frac{x-7}{x+2}$, entonces $f(a+9)$ queda:

i. $\frac{a-9}{a+2}$ ii. $\frac{a+16}{a+11}$ iii. $\frac{a}{a+11}$ iv. $\frac{a+2}{a+11}$

l) Si $\frac{x-7}{x^2+2}$, entonces $f(a^2)$ queda:

i. $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{2}}$ ii. $\frac{a-7}{a^2+2}$ iii. $\frac{a^2-7}{a^4+2}$ iv. $\frac{a^2}{a^2+2}$

m) El dominio de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-3}}$ es:

i. $[3, \infty)$ ii. $(3/2, \infty)$ iii. $(3, \infty)$ iv. $[3/2, \infty)$

n) El dominio de la función $f(x) = \sqrt{-4x - 16}$ es:

i. $[4, \infty)$ ii. $(-\infty, -4]$ iii. $(-\infty, 4)$ iv. $(-4, \infty)$

o) Halla y simplifica $f + g, f - g, f \cdot g$ y $f \circ g$, para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas a continuación:

i. $f(x) = x^2 - 10x + 2$ y $g(x) = -3x^3 + 4x^2 - x - 1$

ii. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = -8$

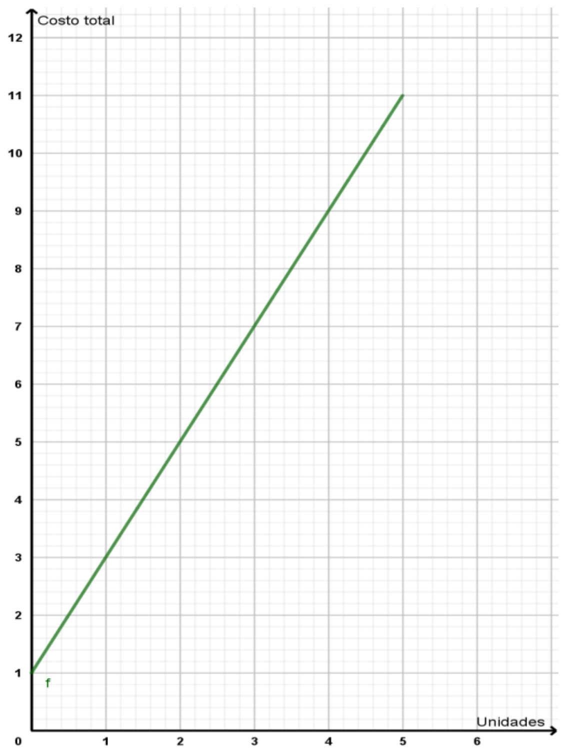
iii. $f(x) = -4$ y $g(x) = 10$

iv. $f(x) = -5x + 1$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$

v. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ y $g(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-2}$

vi. $f(x) = x^2 - 1$ y $g(t) = \sqrt[3]{x+3}$

p) La gráfica presentada a continuación, establece la relación entre el número de unidades [$\times$ 100] producidas de pasteles y el costo total [en miles]. Responde las siguientes preguntas.



i. ¿Cuál es el costo de producción de 4 mil pasteles?

ii. ¿Cree que $22000 corresponde al costo de producción de 100 pasteles?

iii. ¿Qué interpretación le da al costo asumido de no producir pasteles?

iv. ¿Cuál es la tendencia de los costos de producción de pasteles?

v. Escriba una función a través de una expresión algebraica que evidencia la relación entre el costo total y el número de unidades.

q) La función velocidad $v(t) = 0.1t + 10$ medida en metros por segundo m/s, corresponde a la velocidad a la que se mueve un objeto. Resuelve:

i. Determine la velocidad a la que se mueve el objeto al cabo de 5 segundos.

ii. Determine el tiempo que ha transcurrido cuando la velocidad del objeto es de $15m/s$.

iii. Determine el tiempo que ha transcurrido cuando el objeto tiene una velocidad igual al doble de la velocidad inicial.

iv. ¿La velocidad del objeto tiene a aumentar o disminuir? Justifica.

r) La función $C(t) = \frac{5}{9}t^2 - \frac{10}{3}t + 6$ determina el número de litros de un combustible particular del motor en un vehículo espacial al cabo de t horas.

i. Determine la cantidad de combustible al iniciar la operación espacial.

ii. Determine la cantidad de combustible al cabo de 5 horas.

iii. Determine el tiempo transcurrido cuando la máquina contiene 4 litros de combustible.

iv. Determine la cantidad de litros mínima de combustible que debe tener la máquina para realizar una operación normal y el tiempo en donde alcanza esta capacidad mínima.

s) El modelo para el costo de producción de q cantidad de artículos de cuero viene dado por $C(q) = 5q + 15$, donde C es el costo de producción *[en miles de pesos]*.

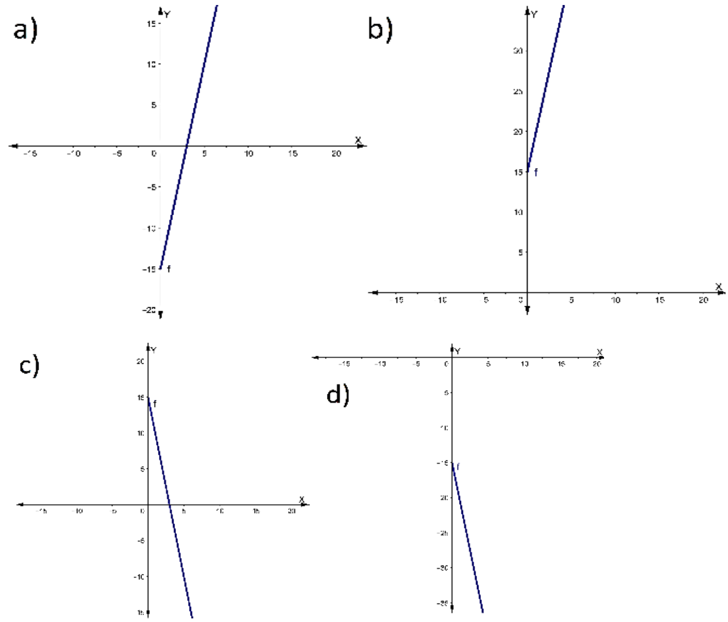
i. El costo de producción *[en miles de pesos]* en caso de no producir artículos es:

1. 15 2. 35 3. 65 4. 25

ii. El conjunto de valores correspondiente a los niveles de producción es el conjunto de:

1. Naturales 2. Enteros 3. Racionales 4. Reales

iii. ¿Cuáles de las siguientes opciones corresponde a una representación gráfica del modelo?



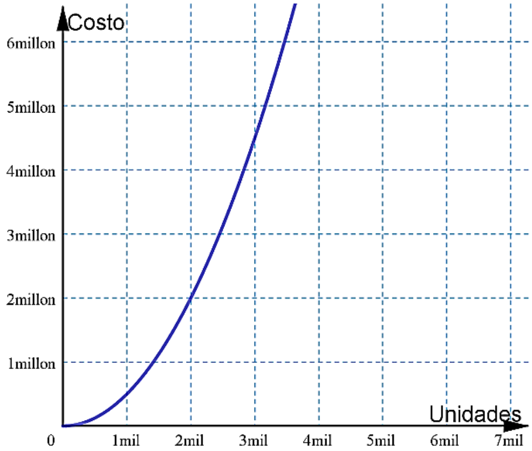
iv. De acuerdo con modelo, se podría afirmar que, a mayor producción, los costos de producción tienden a:

1. Crecer 2. Disminuir 3. Constante 4. Ser variable

v. Se cuenta con un monto de $COP\$2000000$ para produccción, el número estimado de artículos de cuero a producir es:

1. 2010 2. 397 3. 403 4. 1900

t) La siguiente gráfica corresponde a la gráfica de la función costo total [en millones] de producir q cantidad de unidades [en miles]. Responde las preguntas con base en la gráfica siguiente:



i. ¿Cuál es la cantidad aproximada de unidades que se deben producir para alcanzar costos de $6 millones?

ii. ¿Cuál es el costo que asume el productor cuando se producen 3 mil unidades?

iii. ¿Entre qué valores oscila el costo de producción cuando se producen entre 1 y 3 mil unidades?

iv. ¿Cuál es el costo de producción de 0 unidades?

v. Según el gráfico, ¿cuál es la tendencia de los costos de producción en la medida que se produzcan cada vez más artículos?

CAPÍTULO 10. EJERCICIOS ADICIONALES

CAPÍTULO 10.

EJERCICIOS ADICIONALES

I. En una empresa de telefonía se aplicó una encuesta a sus 50 empleados sobre las preferencias al momento de tomar su hora de almuerzo. La condición de la encuesta es que debe elegir únicamente una sola franja horaria. El encuestador pasó la siguiente información:

Franjas	Respuestas afirmativas
11-12	13
12-1	20
1-2	17

Responda las siguientes preguntas de acuerdo con la información presentada:

1. ¿Se puede afirmar que el jefe deja la franja de almuerzo de 12-1?

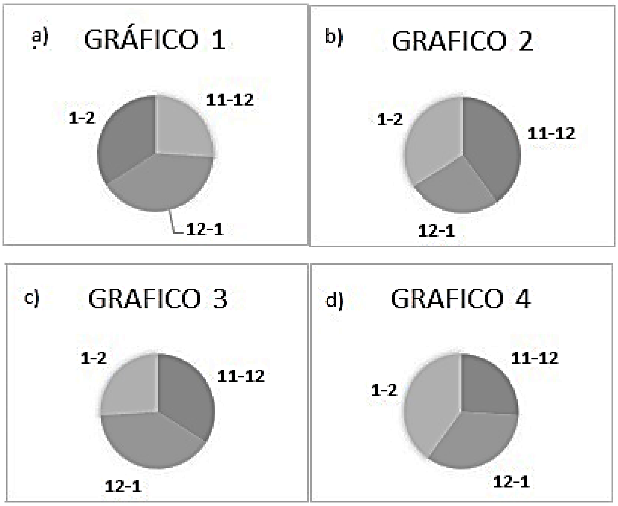
    a) Si, porque corresponde a un horario intermedio.

    b) No, porque el 60% elige una franja distinta a la de 12-1.

    c) Si, porque es el horario en que más coinciden los empleados.

    d) No, porque solo el 40% corresponde a los que deciden esta franja.

2. ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponde a la situación anterior:



3. De acuerdo con lo establecido, no podemos afirmar que:

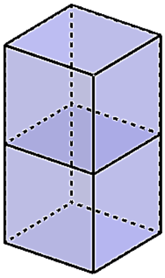
   a) El 74% escogió otra franja diferente a la de 11-12.

   b) Solo el 40% escogió la franja de 12-1.

   c) La franja de 11-12 es la menos escogida.

   d) La minoría de empleados escogió la franja de 1-2.

II. El área de un cubo es la suma de las áreas de sus caras. Como el área de cada cara es x^2, entonces el área del cubo es $A = 6x^2$, donde x corresponde a la longitud de la arista del cubo. Se construye una torre con dos cubos, pegados en una de sus caras y se desea forrar con papel decorativo. La persona encargada de este trabajo indica que el área a forrar corresponde a la expresión:



a) $A = 6x^2 + 6x^2$

b) $A = (6x^2) \cdot (6x^2)$

c) $A = 6x^2 + 6x^2 - 2x^2$

d) $A = (6x^2) \cdot (6x^2) - 2x^2$

III. Una empresa de transporte cuenta con buses estándar con capacidad para 36 pasajeros; y de lujo, con capacidad para 28 pasajeros, para viajes de Cali a Cúcuta. El costo de viaje por persona en el estándar es de $\$125$ *[en miles]* y en el de lujo de $\$185$ *[en miles]*. Se asume que el conductor no llevará pasajeros de pie y que los buses inician su trayecto lleno. De acuerdo con esta información:

1. Si la empresa oferta toda la semana un trayecto diario en un bus estándar y los fines de semana $[v - s - d]$ un trayecto en un bus de lujo, los ingresos recibidos por estos viajes se pueden calcular como:

   a) $(125 \cdot 36 + 185 \cdot 28) \cdot (7 + 3)$

   b) $4 \cdot 4500 + 3 \cdot 5180$

   c) $(125 \cdot 7 + 185 \cdot 3) \cdot (36 + 28)$

   d) $7 \cdot 4500 + 3 \cdot 5180$

2. Si en temporada alta los pasajes tienen un incremento del 5% en estándar y 10% en bus de lujo, no podemos afirmar que:

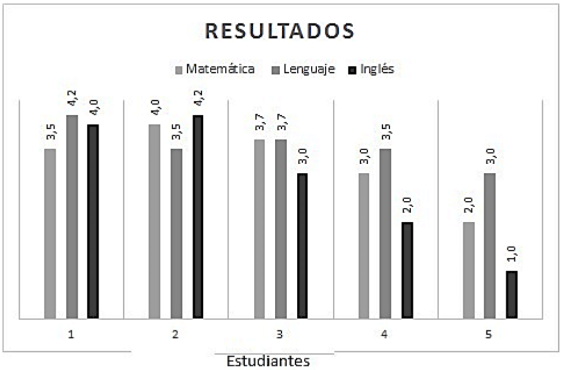
   a) El ingreso semanal en buses estándar es de $\$33075$.

   b) El porcentaje de incremento a la semana en temporada alta corresponde al 15%.

   c) El valor del pasaje en bus de lujo en temporada alta es de $\$203.5$

   d) El incremento que tiene la empresa con respecto la temporada baja en el bus estándar es de $\$1575$.

IV. Cinco jóvenes presentaron pruebas para acceder a una beca para estudios superiores. Para ello presentaron 3 pruebas cuyos resultados se registran en el siguiente gráfico:



1. Según los resultados, se puede afirmar que:

   a) El No.1 tiene mejor promedio pues tiene la mejor calificación en lenguaje.

   b) El No.2 tiene mejor promedio pues tiene la mejor calificación en matemáticas.

   c) El No.1 y No.2 tienen mejor promedio pues al sumar sus respectivas calificaciones y dividir entre 3 se obtiene el valor más alto.

   d) El No.3 tiene el promedio más bajo pues al sumar sus respectivas calificaciones y dividir entre 3 se obtiene el valor más bajo.

2. Si para otorgar la beca se ponderan matemáticas con 50%, lenguaje en 30% y el resto en inglés, el escalafón de estudiantes correspondiente es:

   a) 2, 1, 3, 4, 5

   b) 3, 1, 4, 2, 5

c) 2, 3, 1, 4, 5

d) 1, 2, 3, 4, 5

3. El grupo de estudiante demandó al evaluador al encontrar inconsistencia en la prueba de lenguaje, por lo que la revisión genera un aumento de 0.5 en sus calificaciones. Con base en esto, ¿Es cierto que el estudiante 1 ahora ganaría la beca?

   a) Si, porque con este cambio mejora su promedio.

   b) No, porque el incremento de 0.5 es para todos y esto no afecta las posiciones.

   c) Si, porque aparece de primero en el listado de estudiantes

   d) No, porque no es el mayor promedio de todos los demás.

A continuación encontrarás algunos problemas de aplicación resueltos.

https://sites.google.com/usc.edu.co/irm/p%C3%A1gina-principal

Video 16

ACERCA DE LOS AUTORES

Jaime Andrés Castaño Perea

Nació en la ciudad de Santiago de Cali - Colombia. Estudió en la Universidad del Valle y obtuvo el título como Matemático y posteriormente en la misma, obtuvo el título de Magister en Ciencias Matemáticas. Su área de investigación principal es la lógica y teoría de categorías orientada a ciencias de la computación teórica. Actualmente es docente tiempo completo de la Universidad Santiago desde el año 2014 y coordinador del curso de Razonamiento Cuantitativo.

Celimo Alexander Peña Rengifo

Matemático colombiano nacido en Santiago de Cali – Colombia, con Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle. Actualmente es docente tiempo completo e investigador de la Universidad Santiago desde el año 2014. Coordino el área de matemáticas del 2014 al 2017. Ha dictado cursos como Razonamiento Cuantitativo, Calculo I, Calculo II, Geometría I, Fundamentos de Matemáticas I, Fundamentos de Matemáticas II, entre otros. Su principal área de investigación está relacionada con las álgebras de las lógicas polivalentes. Además, se destaca su interés por los temas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación superior.

REFERENCIAS

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson Education.

ICFES. (s.f.). *ICFES*. Recuperado el 2018, de http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/saber-pro-estudiantes/informacion-general-del-examen

Miller, C. D., Heeren, V. E., & Hornsby, J. (2013). *Matemáticas: Razonamiento y Aplicaciones*. México: Pearson Education.

Rios Gallego, J. A. (s.f.). *julioprofe.net*. Obtenido de http://julioprofe.net

Rojas, L. M., & Cardona Toro, J. G. (2008). *Matemáticas Básicas para la Salud* (Segunda ed.). Pereira, Colombia: Fundación Universitaria del Área Andina.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica* (Tercera ed.). México: McGraw-Hill.

Este libro fue diagramado utilizando
fuentes tipográficas Times New Roman
Se Terminó de imprimir en noviembre en los talleres de
SAMAVA EDICIONES E.U.
POPAYÁN - COLOMBIA
2018

Fue publicado por la Facultad de Ciencias Básicas
de la Universidad Santiago de Cali.