

Introducción al filtro de Kalman en robótica móvil

Introduction to Kalman's filter in mobile robotics

COLCIENCIAS TIPO 6. REVISIÓN DE TEMA

RECIBIDO: DICIEMBRE 4, 2015; ACEPTADO: FEBRERO 5, 2016

Zuleika Alezones Campos

zuleika.alezones@unillanos.edu.co

Universidad de los Llanos, Villavicencio-Colombia

Resumen

Una de las metodologías que presenta excelentes resultados, a bajo costo, en el tratamiento de la información es el filtro de Kalman, el cual, haciendo uso de la recursividad, predice y corrige los estados en una señal que contiene errores o información no esperada. En el caso del robot móvil, la señal es la información que se captura del ambiente, y la predicción que se requiere hace referencia a la trayectoria correcta que se le asigna al dispositivo robótico. Debido a la efectividad del filtro de Kalman en diversas áreas, es sustancial su estudio aplicado a la predicción del movimiento. El proyecto de investigación en el que se origina este artículo busca analizar el filtro de Kalman aplicado al control de la navegación de un robot móvil prototipo, desde tres fases principales: la identificación de los requerimientos, la construcción del producto centrada en la optimización y creación del ejecutable y, por último, verificación.

Palabras Clave

Filtro de Kalman; robot móvil; tracción diferencial; control de navegación.

Abstract

Kalman's filter methodologies have presented excellent results –at low cost– in information processing; using recursion predicts and corrects the states of a signal containing errors or unexpected information. In the case of the mobile robot, the signal is the information captured from the environment, and the required prediction refers to assign the correct path to the robotic device. Because the effectiveness of the Kalman's filter in various fields, it is applied to study substantial motion prediction. The research project on which this article originates seeks to analyze the Kalman's filter applied to control navigation of a mobile robot prototype from three main phases: requirements identification, product building focused in optimization and executable development, and finally, verification.

Keywords

Kalman's filter; mobile robot; differential drive; cruise control.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la tecnología va más allá de suplir las necesidades básicas del ser humano, facilitando la vida a gran escala, llegando a reemplazar labores o reproduciendo y mejorando diversas tareas; en este punto, la robótica es una disciplina que presenta desarrollos y aportes cuya representación y documentación en aplicaciones específicas, en cada caso, va ligada a los criterios del autor.

En un principio su aplicación estaba presente solo en procesos industriales; al pasar de los años se fue aprovisionando de más capacidades, lo que llevó su aplicación a diversos ambientes (Saha, 2010), como proyectos realizados en entornos inexplorados y complejos –ejemplo de ello es la exploración del espacio exterior (Krotkov, Simmons, Cozman, & Koenig, 1996)–, lo que destacó la importancia de proporcionar movimiento a un robot y de realizar investigaciones en el tema de robótica móvil.

En el modelo fundamental de un robot móvil es primordial el uso de las matemáticas, que son la base y estructura de cualquier trabajo; su concepto esencial consiste en lograr una apropiada localización de un robot en un medio de exploración, mediante las tareas de planificación, percepción y control de las trayectorias (Faragher, 2012), gracias al procesamiento y análisis de la información.

La planificación de la ruta de un robot se inicia con la captura de información del entorno que lo rodea, junto con su orientación y coordenadas x/y (Ollero, 2001); el paso a seguir es la percepción y control, donde se aplican filtros que depuran los datos obtenidos y eliminan posibles errores, y permiten conseguir una correcta predicción del movimiento.

Entre los modelos de filtros a implementar se encuentra el filtro de Kalman, el cual se centra en el álgebra vectorial y consiste en una técnica recursiva que permite conseguir la trayectoria adecuada de un robot mediante predicción y corrección (Osorio, 2012). Sus bases teóricas se centran en la teoría de mínimos cuadrados, la teoría de probabilidad, los sistemas dinámicos, los sistemas estocásticos y el álgebra lineal (Grewal, 1993); su aplicación se muestra en múltiples áreas, tales como: la navegación, aeroespacial, los sistemas de información geográfica, el modelamiento y la manufactura, lo que señala la importancia de los estudios realizados en este método y en particular de su aplicación a la robótica móvil.

La eficiencia del filtro radica en el trabajo conjunto en las etapas de predicción y control (Kleinbauer, 2004) con el apoyo de cámaras, laser, GPS y modelos matemáticos, entre otros; sin embargo, son recientes sus múltiples implementaciones, en ejecución y en estudio, con diferentes soportes o técnicas en el campo de la robótica móvil.

El presente artículo se desarrolla en el marco de una tesis de maestría que propone la evaluación del filtro de Kalman como técnica de control de navegación de un robot móvil, por tanto realizar una valoración detallada del contexto clarifica los alcances y necesidades en la documentación a realizar en el tema.

II. CONCEPTOS GENERALES

En robótica móvil, el aspecto más importante es el desplazamiento, por lo que su arquitectura se conforma de un vehículo, y su trabajo depende de la movilidad del mismo en un medio (Ollero, 2001). El estudio del problema de control de navegación requiere de múltiples disciplinas, en algunos trabajos se desarrollan metodologías que requieren de grandes cantidades de tiempo y procesamiento de la información (Kleinbauer, 2004).

Una de las metodologías que presenta resultados a bajo costo en el tratamiento de la información es el filtro de Kalman (King, 2008), debido al uso de la recursividad, que predice y corrige los estados en una señal que contiene errores o información no esperada (Zarchan, 2005). En el caso del robot móvil, la señal es la información que se captura del ambiente, y la predicción que se requiere hace referencia a la trayectoria correcta que se le asigna al dispositivo robótico. Debido a la efectividad del filtro Kalman en diversas áreas (Soong, 2004), es sustancial su estudio aplicado a la predicción del movimiento.

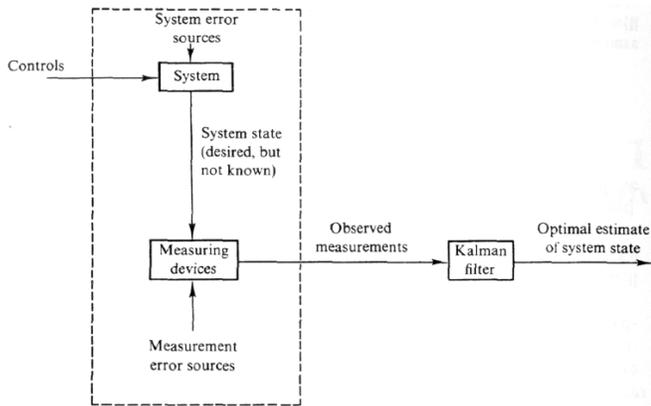
A. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman –también denominado “KF”, por *Kalman Filtering*–, se dio a conocer a principios de la década de los sesenta; su importancia radica en el mejoramiento del filtro de Wiener, el cual funcionaba con las propiedades de señal y ruido constantes, mientras que el filtro de Kalman propone el trabajo en sistemas multivariables y no fijos. La investigación fue financiada por la oficina de la Fuerza Aérea de Estados Unidos (Kalman, 1960).

En el estudio del filtro es necesario el dominio de conceptos matemáticos fundamentales, como el álgebra de

matrices, la estadística, las probabilidades y los métodos numéricos; conocimientos enfocados en la predicción de un estado indeterminado en un sistema dinámico de manera recursiva. En la Figura 1 (Maybeck, 1979) se muestra el diagrama de flujo de un estado óptimo, allí se describe cómo desde un sistema se pretende llegar a una estimación recomendable de estado, la cual es generada de la aplicación de filtro de Kalman a las mediciones realizadas, desde diversos dispositivos (Solera, 2003).

Figura 1. Aplicación original del filtro de Kalman (Maybeck, 1979)



Para comprender conceptualmente el filtro de Kalman en su totalidad, es necesario el repaso de los siguientes temas: probabilidad, variables aleatorias, media y varianza, y distribución normal o gaussiana, descritos a continuación.

Probabilidad

Su estudio radica en la necesidad de predecir un estado no conocido en una señal, es por ello que se debe tener en cuenta el concepto de ocurrencia por “azar”. Matemáticamente es posible calcular distintos tipos de probabilidades como se observa en la Ecuación 1 (Miller & Freund, 1963).

Ecuación 1. Probabilidad

$$p(A) = \frac{\text{Posibles ocurrencias del evento } A}{\text{Total de ocurrencias}} \quad (a)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) \quad (b)$$

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \quad (c)$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (d)$$

En la ecuación 1 se presentan los iteradores:

- (a), la probabilidad de que un evento discreto se presente;
- (b), la probabilidad que se presente una ocurrencia A o B;
- (c), la probabilidad que ambos eventos A y B ocurran; y
- (d), la probabilidad que se dé un evento A dada la ocurrencia o resultado de un evento B, lo que se denomina probabilidad condicional.

Variables aleatorias

Su estudio es fundamental en el filtro de Kalman ya que, en seguimiento y captura de información, hace referencia a eventos discretos, en los que una variable aleatoria se representa como una función que se asigna a todos los puntos en el espacio muestral, una de las definiciones fundamentales se representan en la Ecuación 2 (Ross, 2007) con la función de distribución acumulativa, en donde, desde una función común, se representa la probabilidad de una variable aleatoria.

Ecuación 2. Función de distribución acumulativa

$$F_x(x) = p[-\infty, x]$$

Aplicando derivada en función de x a $F_x(x)$ a la ecuación anterior se obtiene la función de densidad de probabilidad, lo que llega a deducir la Ecuación 3 (Devore, 2008), que demuestra la probabilidad para variables aleatorias continuas en eventos discretos, que se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad en un intervalo de interés.

Ecuación 3. Función de densidad de probabilidad para variables aleatorias continuas

$$p_x[a, b] = \int_a^b f_x(x) dx$$

Media y varianza

Estos conceptos son bastante familiares, en variables aleatorias la media se conoce como el valor esperado y se define en la Ecuación 4 (Miller & Freund, 1963):

Ecuación 4. Valor medio en variables aleatorias

$$X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

La ecuación 4 se conoce también como primer momento estadístico, en ella se aplica $g(x) = x^k$ con el fin de obtener el k -ésimo momento estadístico, y elevando al cuadrado se obtiene la varianza de la señal, lo que también se conoce como segundo momento estadístico y cuyo procedimiento se observa en la Ecuación 5 (Guzzi, 2012).

Ecuación 5. Cálculo de la varianza a partir del valor medio

$$E(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x) dx$$

...aplicando el segundo momento:

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx$$

... en donde:

$$\begin{aligned} \text{Varianza } X &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E(X^2) - E(x)^2 \end{aligned}$$

La importancia de la variancia para el filtro de Kalman radica en su utilidad para variables al azar, ya que su valor indica la cantidad de variación o “ruido” en una señal. Aplicando raíz cuadrada a la variancia obtenemos la Ecuación 6 (Devore, 2008) de desviación estándar, cuya utilidad radica en que da la posibilidad de presentar los mismos valores de la señal original.

Ecuación 6. Desviación estándar

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Varianza de } X}$$

Distribución normal o gaussiana

Es de gran utilidad en el modelado de la aleatoriedad debido a que muchos sistemas al azar tienden a pertenecer a una distribución normal.

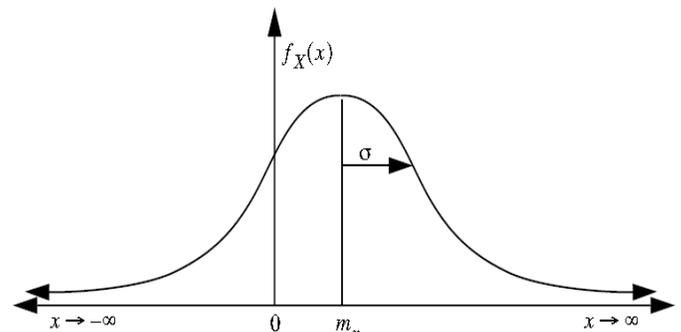
Dado un proceso aleatorio X, que se distribuye normalmente en $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, de lo que se tiene a μ como media, σ^2 como variancia y deduciendo a σ por desviación estándar, la función de densidad de probabilidad se obtiene en la Ecuación 7 (Soong, 2004).

Ecuación 7. Función de densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Gráficamente la distribución normal es lo que se conoce como campana de Gauss, la cual se observa en la Figura 2 (Welch & Bishop, 2001), que tiene como valores a representar en el grafico a $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Figura 2. Función de densidad de probabilidad (Welch & Bishop, 2001)



Terminando de enunciar los conceptos básicos para el trabajo en filtro de Kalman, es posible abordar su formulación original, lo que en términos generales se explica como un proceso en el cual se realizan mediciones y se estima o predice un estado, representado por puntos discretos en el tiempo. En esencia, el filtro es un estimador del estado $x \in \mathfrak{R}^n$ en el tiempo discreto, el cual es determinado por una ecuación lineal en diferencia estocástica, como se observa en la Ecuación 8 (Solera, 2003).

Ecuación 8. Ecuación lineal diferencial estocástica

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + w_{t-1}$$

... con una medida

$$Z \in \mathfrak{R}^m$$

... que es

$$Z_t = HX_t + v_t$$

En la ecuación 8 w_t representa el error del proceso y v_t el error de la medida, los cuales son de ruido blanco y con distribución de probabilidad normal.

El filtro de Kalman corrige el error presentado en una señal mediante retroalimentación que se obtiene de los datos obtenidos. Sus ecuaciones se dividen en dos grupos, de predicción y de actualización, que tienen las siguientes características (Welch & Bishop, 2001):

Las ecuaciones de predicción:

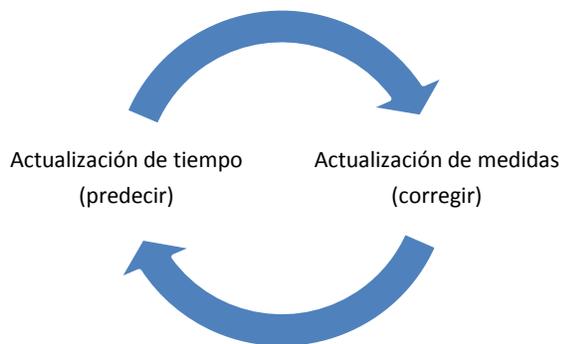
- son responsables de la proyección del estado al momento t , tomando como referencia el estado $t - 1$;
- son responsables de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado; y
- están pensadas como ecuaciones de corrección.

Por su parte, las ecuaciones de actualización:

- son responsables de la retroalimentación; y
- están pensadas como ecuaciones de pronóstico.

Lo anterior describe las distintas ecuaciones que se encuentran en el filtro de Kalman, lo que lleva a pensar que, de manera generalizada, este filtro consiste en una serie de pasos de pronóstico–corrección para resolver un problema, prediciendo un nuevo estado, mediante una nueva medida, como se resume en la Figura 3 (Castañeda, Nieto, & Ortiz, 2013).

Figura 3. Funcionamiento del filtro de Kalman (Castañeda et al., 2013)



El algoritmo se inicia generando una predicción de la información de la señal disponible en ese instante, como se observa en la Figura 3; en la segunda parte se genera una corrección, mejorando el estado de la señal, de tal manera que el error se minimiza estadísticamente.

En la Ecuación 9 (Welch & Bishop, 2001) se presentan las fórmulas para los procedimientos de predicción, mostrando la estimación del estado y la covarianza desde

un $t-1$ a t . En la ecuación 9(a) la matriz A relaciona el momento $t-1$ con el t actual, lo que da a entender que se puede aplicar en los diferentes estados en el tiempo (t); en la ecuación 9(b), Q representa la covarianza de la aleatoriedad de la señal a la cual se le desea predecir el estado.

Ecuación 9. Ecuaciones de predicción

$$\hat{X}_t^* = A\hat{X}_{t-1} \quad (a)$$

$$P_t^* = AP_{t-1}A^T + Q \quad (b)$$

El paso a seguir es la corrección de la información que se realiza de manera posterior al proceso de predicción, la Ecuación 10 (Welch & Bishop, 2001) presenta las diferentes tareas a realizar en este proceso: en la primera tarea –ecuación 10(a)– se realiza el cálculo de la ganancia que minimiza el error de covarianza de la nueva predicción del estado; a continuación se busca obtener Z_t para generar una nueva estimación del estado, lo que da como resultado la ecuación 10(b). La última tarea, determina un nuevo error de covarianza mediante la ecuación 10(c).

Ecuación 10. Corrección del estado

$$K_t = P_t^*H^T(HP_t^*H^T + R)^{-1} \quad (a)$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_t^* + K_t(Z_t - H\hat{X}_t^*) \quad (b)$$

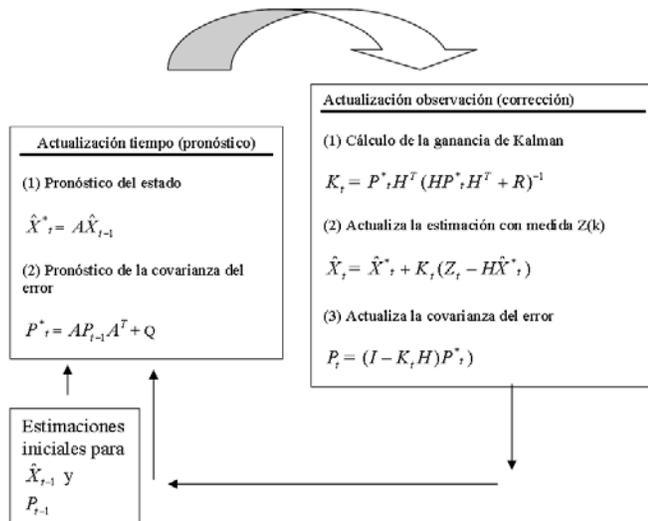
$$P_t = ((I - K_tH)P_t^*) \quad (c)$$

El proceso completo del filtro de Kalman se obtiene de la aplicación de los conjuntos de Ecuaciones 9 y 10, mediante la actualización del tiempo y las medidas, la recursividad se presenta cuando se toman nuevamente información del estado y se usa el error de covarianza calculado previamente, repitiendo el proceso permanentemente. La Figura 4 (Solera, 2003) presenta un resumen completo del filtro.

B. Aplicaciones del filtro de Kalman

Ya completa la presentación de la contextualización de los conceptos básicos y la explicación del funcionamiento del filtro de Kalman, a continuación, para un mejor entendimiento, se enunciarán diversas aplicaciones recientes de él, en orden cronológico, encontradas en la literatura como artículos científicos.

Figura 4: filtro de Kalman (Solera, 2003)



En primera instancia, Moradkhani (2008) ofrece una visión general de las técnicas de medición de la teledetección para los datos de humedad del suelo y de la nieve y describe los avances en las técnicas de asimilación de datos a través del filtrado de conjunto; muestra el filtro de Kalman principalmente desde la variación *Ensemble* [EnKF] y el filtro de partículas [PF], para mejorar la predicción del modelo y la reducción de las incertidumbres involucradas en el proceso de predicción. El filtro de Partículas proporciona una representación completa de la distribución de probabilidad de las variables de estado de interés (según la ley secuencial Bayes) y podría ser un fuerte apoyo para el EnKF, que está sujeto a algunas limitaciones, incluyendo la regla de actualización lineal, observación y la distribución conjunta normal de errores en las variables de estado.

Es posible encontrar estudios en los que el filtro de Kalman se implementa desde una visión profunda de métodos de detección. Gamazo, Vazques, y Gómez (2010) presentan un trabajo en el que se usa la técnica de back-EMF [*Electro Motive Force*]¹, analizando brevemente los procedimientos más relevantes basados en la estimación y modelos, como el filtro de Kalman extendido, el modelo de referencia del sistema adaptativo y las redes neuronales artificiales.

Posteriormente Sabatini (2011) en una revisión bibliográfica realizada desde la investigación de las principales técnicas de fusión de sensorial y filtrado propuestas, para el seguimiento de orientación de partes

del cuerpo humano, muestra metodologías útiles en la aplicación efectiva del filtro en estos casos.

Un año después Montzka, Pauwels, Franssen, Han, & Vereecken (2012) revisan el estado de las técnicas en el tratamiento de la información, mediante una introducción a diferentes métodos, tales como: el filtro de Kalman *Ensemble*, el filtro de partículas (PF) y los métodos para el tratamiento de la aleatoriedad. En esa revisión se concluye con una discusión sobre las ventajas y desventajas de la asimilación de múltiples tipos de datos en un modelo de simulación, y se presentan enfoques existentes que pueden utilizarse para actualizar simultáneamente varios estados de modelo y parámetros del modelo, en otras palabras, los principios básicos para la asimilación de datos que manipulen a aleatoriedad, conceptos que, en proceso de aprendizaje, son apoyados desde un segundo trabajo presentado ese año, en el cual se aplicó una metodología orientada a aprovechar el filtro de Kalman, al combinarla con análisis multiresolución mediante *wavelets*², ya que apoya en la eliminación del error que se puede presentar en una señal.

Por último, en el contexto nacional se presenta el filtro de Kalman enfocado en su mayoría al sector económico, como es el caso de Romero (2007), quien lo aplica sobre temas de inflación y costo de vida; sin embargo, en el área de automatización y control, se destaca su uso en el apoyo de otras técnicas, a las cuales aumenta su efectividad, como es el caso del control de mínima varianza (Zuluaga & Giraldo, 2013), una práctica que aumenta la factibilidad técnica, económica y operacional en la aplicación del filtro de Kalman.

C. Aplicaciones del filtro de Kalman en el control de navegación de un robot móvil

Teniendo presente los trabajos mencionados en torno al filtro de Kalman a modo general, se facilita indagar en este punto sobre el contexto de interés, presentando artículos destacados en la aplicación del filtro a la robótica móvil.

En 2006 se destaca la aplicación del filtro de Kalman con ayuda de mediciones angulares (Font & Batle, 2006), las cuales se realizan desde un punto fijo del robot y otro punto referencia que se encuentre en su entorno, lo que proporciona la posición y orientación.

¹ Medición que determina la velocidad de rotación de un motor.

² Onditas.

En otro caso, es posible observar una implementación con curvas implícitas, en 2010 se acentúa la investigación en la que se presenta una metodología para navegación de robots móviles útiles en el monitoreo, mapeo y vigilancia (Gonçalves, Maia, Pimenta, & Pereira, 2010), en la que se implementa el filtro de Kalman con el trabajo de espacios n-dimensionales.

En general, la efectividad del filtro depende en gran escala de los métodos con que se acompañe, sin embargo la arquitectura del robot influye; en 2011 se propone un robot autónomo provisto de dos ruedas (Arias, Mena, Castillo, & Ramírez, 2011), unido a la simulación del algoritmo desde control óptimo desde la ecuación diferencial de Ricatti (Zill, 1997) y el filtro de Kalman.

También a nivel nacional, Dueñas y Mahecha (2013), presentan un planteamiento de filtro de Kalman extendido, a partir de los modelos de error de los sensores (Unidades de Medida Inerciales, UMI) y un modelo de error para la estado en una plataforma robótica, lo que se denominó como arquitectura de navegación integrada y género como resultados un bajo costo del sistema, escalabilidad y buen desempeño.

III. CONCLUSIONES

El presente artículo encierra el contexto básico en la comprensión del filtro del Kalman, desde sus bases teóricas que son fundamentales para retomar, seguido de una explicación detallada de su funcionalidad, composición y ecuaciones primordiales. Denotando con ello la posibilidad de entender las aplicaciones del mismo, cuando se desea predecir un estado no conocido a partir de información de un estado actual y de suma importancia la utilización de los cálculos realizados para predecir nuevos comportamientos, lo que se conoce como realimentación.

Seguidamente se exponen aplicaciones e investigaciones realizadas con el filtro de Kalman a modo general, lo que desencadena el presente artículo en el tema de interés que son los trabajos elaborados directamente en robótica móvil, denotando la importancia de fijar atención en la arquitectura del robot, para obtener mayor eficiencia en la tarea a implementar, además de seleccionar un método de apoyo al filtro de Kalman adecuado, lo que se determina de diferentes maneras, según el tipo de robot móvil y la labor que se le desea asignar.

IV. REFERENCIAS

- Castañeda, J., Nieto, M., & Ortiz, V. (2013). Análisis y aplicación del filtro de kalman a una señal con ruido aleatorio. *Scientia et Technica*, 18, 267-274.
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y estadística para ingenierías y ciencias* [7a ed.]. México DF: Cengage Learning.
- Dueñas, J. A., & Mahecha, D. E. (2013). *Desarrollo de un sistema de navegación integrada para la evaluación de unidades de medida inerciales sobre una plataforma robótica* [tesis]. Universidad de Buenos Aires: Argentina.
- Faragher, R. (2012). Understanding the basis of the Kalman filter. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(5), 128-132.
- Font, J., & Batle, J. (2006). Posicionamiento de robots móviles mediante un filtro de kalman angular y triangulación. *Información Tecnológica*, 17(5), 9 -14.
- Gamazo, J. C., Vazques, E., & Gomez, J. (2010). Position and speed control of brushless dc motors using sensorless techniques and application trends. *Sensors*, 10(7), 6901-6947.
- Gonçalves, V. M., Maia, C. A., Pimenta, L. C., & Pereira, G. A. (2010). Navegacao de robos utilizando curvas implícitas. *Controle & Automação*, 21(1), 43-57.
- Grewal, A. A. (1993). *Kalman filtering: Theory and practice*. New Jersey, NJ: Prentice-Hall.
- Gutiérrez, E., Flores, J. E., Morín, M. M., & Suárez, H. (2011). Design of an optimal control for an autonomous mobile robot. *Revista mexicana de física*, 57(1), 75-83.
- Guzzi, R. (2012). *Introduzione ai metodi inversi*. Milán, Italia: Springer.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 32(1), 35-45.
- King, P. H. (2008). *A low cost localization solution using a kalman filter for data fusion* [tesis de maestría]. Virginia Polytechnic Institute: Blacksburg, VA.
- Kleinbauer, R. (2004). *Kalman filtering: Implementation with Matlab* [reporte]. Universidad de Stuttgart: Alemania. Disponible en: <http://elib.uni-stuttgart.de/bitstream/11682/3709/1/kleinbauer.pdf>
- Krotkov, E., Simmons, R., Cozman, F., & Koenig, S. (1996). Safeguarded teleoperation for lunar rovers: From human factors to field trials. In *IEEE Planetary Rover Technology and Systems Workshop* (p. 21). IEEE.
- Maybeck, P. S. (1979). *Stochastic models: Estimation, and control*. New York, NY: Academic Press.
- Miller, I., & Freund, J. E. (1963). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Barcelona, España: Reverté.
- Montzka, C., Pauwels, V. R., Franssen, H.-J. H., Han, X., & Vereecken, H. (2012). Multivariate and multiscale data assimilation in terrestrial systems: A review. *Sensors*, 12(2), 16291-16333.
- Moradkhani, H. (2008). Hydrologic remote sensing and land surface data assimilation. *Sensors*, 8(5), 2986-3004.
- Ollero, A. (2001). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Barcelona, España: Marcombo.
- Osorio, L. Y. (2012). Implementación del filtro de Kalman para la localización de un robot móvil tipo LEGO NXT en Labview. *Tecnura Vol. 16*, 68 - 75.
- Romero, J. (2007). *Inflación y costo de vida en las principales ciudades colombianas*. Recuperado de: <http://www.banrep.gov.co/es/contenidos/publicacion/inflaci-n-y-costo-vida-las-principales-ciudades-colombianas>

- Ross, S. M. (2007). *Introducción a la estadística*. Barcelona, España: Reverté.
- Sabatini, A. M. (2011). Estimating three-dimensional orientation of human body parts by inertial/magnetic sensing. *Sensors*, *11*(2), 1489-1525.
- Saha, S. K. (2010). *Introducción a la robótica*. México DF, México: McGraw-Hill.
- Solera, Á. (2003). *Filtro de Kalman* [DIE-02-2003-NT]. San José, Costa Rica: Banco Central de Costa Rica. Disponible en: http://www.bccr.fi.cr/investigacioneseconomicas/metodoscuantitativos/Filtro_de_Kalman.pdf
- Soong, T. T. (2004). *Fundamentals of probability and statistics for engineers*. New York, NY: Wiley.
- Welch, G., & Bishop, G. (2001). An introduction to the Kalman filter. En *SIGGRAPH 2001* [Course 8], Los Angeles, CA, August 12-17, 2001. New York, NY: ACM. Disponible en: http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf
- Zarchan, P. (2005). *Fundamentals of Kalman filtering: A practical approach*. Lexington, MA: American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales*. México, DF: Thomson.
- Zuluaga, C. D. & Giraldo, E. (2013). Control adaptativo basado en mínima varianza y filtro de Kalman. *Tecnura*, *17*(36), 41-49.

V. CURRÍCULO

Zuleika Alezones Campos. Ingeniera de Sistemas de la Universidad de los Llanos y candidata a Magister en Informática en la Universidad Santiago de Cali. Es docente en la Universidad de los Llanos y coordinadora del grupo de investigación en robótica [GIRO].